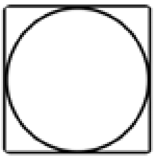
Exercice 2.37 : La figure ci-contre représente plusieurs termes d'une suite formée d'une alternance de cercles et de carrés. Chaque cercle est inscrit dans un carré, et chaque carré (à l'exception du plus grand carré) est inscrit dans un cercle.

Soit S_n la surface du $n^{ième}$ carré et C_n la surface du $n^{ième}$ cercle.

a) Calculer la relation entre S_n et C_n et entre C_n et S_{n+1}.

b) Quelle portion du plus grand carré est ombrée sur la figure ci-dessous ?

a)

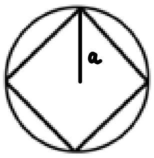


$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a^2 \\ C_1 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{4} \cdot \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{4} S_1$$

Et ceci se généralise quel que soit le facteur d'échelle :

$$\underline{\underline{S_n = \frac{4}{\pi} C_n}}$$

b)



a

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \pi a^2 \\ S_2 &= \frac{2a\,2a}{2} = 2a^2 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = \frac{\pi}{2} S_1$$

Ceci se généralise quel que soit le facteur d'échelle

$$\underline{\underline{C_n = \frac{\pi}{2} S_{n+1}}}$$

c) Aire ombrée : $S_1 - C_1 + S_2 - C_2 + S_3 - C_2 + \dots S_n - C_n$

Or $S_1 - C_1 = S_1 - \frac{\pi}{4} S_1 = S_1\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$S_2 - C_2 = S_2 - \frac{\pi}{4} S_2 = S_2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$\vdots$

Aire ombrée : $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(S_1+S_2+\ldots+S_K+\ldots\right)$

Or $S_2 = \frac{1}{2} S_1$; $S_3 = \frac{1}{2} S_2$; .... $S_{n+1} = \frac{1}{2} S_n$

Ainsi:

Aire ombrée : $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot S_1 \underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1}+\ldots\right)}$

Somme partielle d'une suite arithmétique de 1^e terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{Aire ombrée : } \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot S_1\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot S_1$$

$$= 2\cdot\left(\frac{4-\pi}{4}\right)\cdot S_1 = \underline{\underline{\frac{4-\pi}{2}\cdot S_1}}$$

Soit l'équivalent de 42,92% du carré de départ.

c) Autre démarche possible:

Aire ombrée : $S_1 - C_1 + S_2 - C_2 + \ldots + S_K - C_K + \ldots$

$$\underbrace{\underbrace{\left(S_1+S_2+\ldots+S_K+\ldots\right)}_{\substack{\text{Somme partielle d'une suite géométrique}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}} - \underbrace{\left(C_1+C_2+\ldots+C_K+\ldots\right)}_{\substack{\text{Somme partielle d'une suite géométrique}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}}$$

En utilisant la partie a) de l'exercice, vous pourrez trouver les raisons de chacune de ces suites.