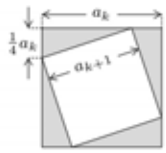
Exercice 2.38 : La première figure montre quelques termes d'une suite de carrés $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$. Soit a_k, A_k, et P_k respectivement le côté, l'aire et le périmètre du carré S_k. Le carré S_{k+1} est construit à partir de S_k en reliant quatre points se trouvant sur S_k, chaque point se trouvant à une distance de $\frac{1}{4}a_k$ d'un sommet du carré, comme indiqué sur la seconde figure.



a) Calculer la relation entre a_{k+1} et a_k.
b) Calculer le terme général des trois suites a_n, A_n et P_n .
c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ en fonction de a_1

a) Par Pythagore : $\left(\frac{1}{4} a_k\right)^2 + \left(\frac{3}{4} a_k\right)^2 = a_{k+1}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{16} a_k^2 = a_{k+1}^2 \Leftrightarrow \underline{\underline{a_{k+1} = \frac{\sqrt{10}}{4} a_k}}$$

b). La suite a_n est une suite géométrique de 1^{er} terme a_1 et de raison $\frac{\sqrt{10}}{4}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_n = a_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}}}$$

- $A_{k+1} = (a_{k+1})^2 = \frac{10}{16} \cdot a_k^2 = \frac{10}{16} A_k$

La suite A_n est une suite géométrique de 1^{er} terme A_1 et de raison $10/16$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_n = A_1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}}}$$

$$\cdot \quad P_{k+1} = 4a_{k+1} = 4\cdot\frac{\sqrt{10}}{4}a_k = \frac{\sqrt{10}}{4}(4a_k) = \frac{\sqrt{10}}{4}P_k$$

La suite P_n est une suite géométrique de 1^{er} terme P_1 et de raison $\sqrt{10}/4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_n = P_1\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}}}$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n = 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

1^{er} terme $= a_1$ et raison $= \frac{\sqrt{10}}{4}$

$$\Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{a_1}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a_1}{4-\sqrt{10}}$$

$$= \frac{4a_1}{4-\sqrt{10}}\cdot\frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}} = \frac{(16+4\sqrt{10})\cdot a_1}{6}$$

$$= \frac{(8+2\sqrt{10})a_1}{3}$$

Ainsi $$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 4\cdot S_\infty = \underline{\underline{\frac{8(4+\sqrt{10})a_1}{3}}}$$