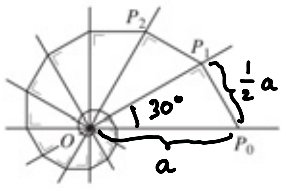
Exercice 2.39 : On considère six droites concourantes en O, chacune déterminant un angle de 30° avec ses voisines. Par un point P_0 d'une des droites, situé à une distance a de O, on abaisse une perpendiculaire sur sa voisine et on trouve ainsi le point P_1. On fait de même avec P_1, P_2, … en créant ainsi une spirale (voir figure).



a) Calculer, en fonction de a, les distances P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3.

b) Les distances P_nP_{n+1} déterminent une suite, quel est son terme général ?

c) Quelle est la longueur totale de la spirale ?

a) Chaque triangle est un demi-triangle équilatéral

Ainsi • $P_0P_1 = \frac{1}{2}a$

• $OP_1 = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow P_1P_2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

En réitérant le même processus, on obtient $P_2P_3 = \frac{3}{8}a$

b) les distances P_nP_{n+1} forment une suite géométrique de 1er terme $\frac{1}{2}a$ et de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ terme général : $P_nP_{n+1} = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$

c) Il s'agit donc de calculer $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})\cdot a$$