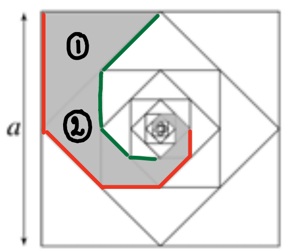
**Exercice 2.40 :** En partant d'un carré de côté a, on construit une suite infinie de carrés emboités dont les sommets sont les milieux des côtés du carré précédent. On considère pour finir la figure grisée, formée par la réunion de triangles rectangles.

Calculer l'aire et le périmètre de cette figure.




## Concernant l'aire grisée :

- On retrouve 8 fois le triangle ① dans le carré de départ

$\Rightarrow \text{Aire}_{①} = \frac{1}{8} a^2$

- On retrouve 16 fois le triangle ② dans le carré de départ (car il est 2x plus petit que le triangle ①)

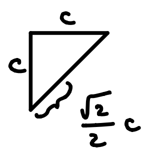
$\Rightarrow \text{Aire}_{②} = \frac{1}{6} a^2$

- l'aire totale $= a^2 \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \right)$

Somme partielle d'une suite arithmétique de 1er terme $\frac{1}{8}$ et de raison $\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\text{Aire} = \frac{1}{4} a^2}}$$

## Concernant le périmètre :




Observons les 2 suites colorées ci-dessus

- Périmètre rouge : $\frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} a \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{1}{2} a \right) \right) + \dots$

somme partielle d'une suite géométrique de $\frac{1}{2}$ terme $\frac{1}{2} a$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{(2+\sqrt{2})a}{2}}}$$

- <u>Périmètre vert :</u> $\frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right) + \ldots\ldots$

  somme partielle d'une suite géométrique de $1^{er}$ terme $\frac{\sqrt{2}}{4}a$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S'_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{2}+2}{2}a}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+1}{2}a}}$$

- Périmètre total : $\frac{1}{2}a + S_\infty + S'_\infty$

$$= a\left[\frac{1}{2} + \frac{(2+\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$$

$$= a\left[\frac{4+2\sqrt{2}}{2}\right] = \underline{\underline{(2+\sqrt{2})\,a}}$$