Exercice 2.41 : **Le triangle de Sierpinski**

Waclaw Sierpinski
(1882 - 1969)

Le triangle de Sierpinski, dessiné en 1915, est un exemple de fractale. Il peut être construit en commençant par un triangle équilatéral, de couleur noire et sous forme de pièce solide. Ce triangle est divisé en quatre triangles équilatéraux et congruents, puis le triangle central est enlevé de la pièce. À l'étape suivante, chacun des trois triangles restants est divisé en quatre triangles équilatéraux et congruents, puis le triangle central à l'intérieur de chacun de ces triangles est enlevé de la pièce, comme montré sur la première figure. Lors de la troisième étape, neuf triangles sont enlevés de la pièce. Si l'on poursuit ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpinski.

étape n° 1   étape n° 2   étape n° 3   étape n° ??

a) Déterminer une suite géométrique a_k qui donne le nombre de triangles enlevés <u>lors</u> de la $k^{\text{ième}}$ étape.

b) Calculer le nombre de triangles enlevés de la pièce lors de la quinzième étape.

c) Calculer le nombre total de triangles enlevés de la pièce après quinze étapes.

d) En supposant que le triangle de départ ait une surface de 1 unité, calculer une suite b_k qui donne la surface des pièces enlevées <u>lors</u> de la $k^{\text{ième}}$ étape. Montrer que cette suite est une suite géométrique.

e) Déterminer la surface enlevée lors de la septième étape.

f) Déterminer la surface totale enlevée de la pièce après la septième étape.

g) Déterminer quelle proportion de l'aire du triangle de départ est encore noire lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

a) $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 9$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{a_k = 1 \cdot 3^{k-1}}}$

b) $a_{15} = 1 \cdot 3^{14} = \underline{\underline{3^{14}}}$

c) $S_{15} = 1 \cdot \dfrac{1-3^{15}}{1-3} = \dfrac{3^{15}-1}{2} = \underline{\underline{7'174'453}}$

d) $b_1 = \dfrac{1}{4}$; $b_2 = 3 \cdot \dfrac{1}{16}$; $b_3 = 9 \cdot \dfrac{1}{64}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{b_k = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}}}$

e) $b_7 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^6 \cong 0{,}04449 \cong \underline{\underline{4{,}45\%}}$

f) $S_7 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1-(3/4)^7}{1-3/4} \cong \underline{\underline{86{,}65\%}}$

g) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{1/4}{1-3/4} = \dfrac{1/4}{1/4} = 1 = \underline{\underline{100\%}}$

Intrigant ... Non?