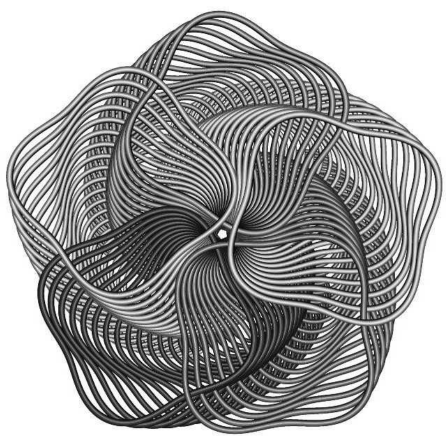
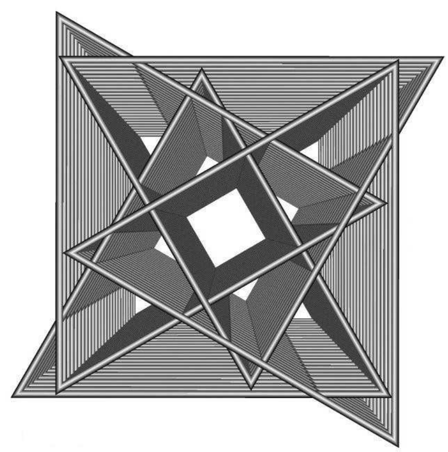
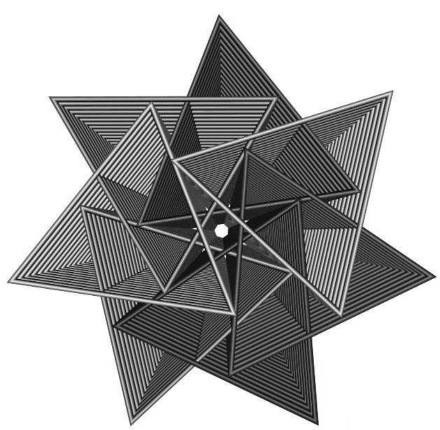
Géométrie Vectorielle

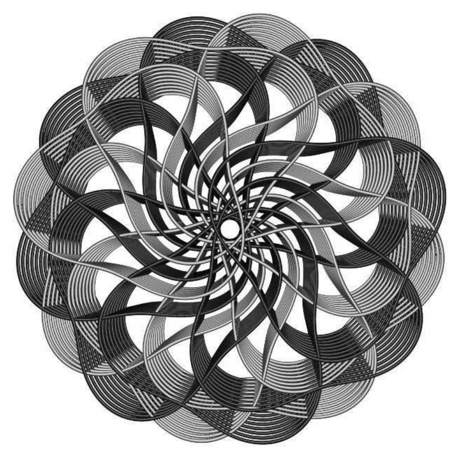
$1\mathrm{M}_{\mathrm{Renf}}$

Jean-Philippe Javet









Source images : `http://www.josleys.com`

`http://www.javmath.ch`

Table des matières

1 Vecteurs, composantes - points, coordonnées **1**
1.1 Les vecteurs 1
1.1.1 La notion de vecteur 1
1.1.2 Opérations sur les vecteurs du plan ou de l'espace 4
1.1.3 La géométrie vectorielle pour démontrer. 12
1.1.4 Tests de colinéarité et de coplanarité 13
1.2 Bases et composantes 16
1.2.1 Dans le plan 16
1.2.2 Dans l'espace 20
1.2.3 Tests de colinéarité et de coplanarité 22
1.3 Repères et coordonnées 27
1.3.1 Dans le plan 27
1.3.2 Dans l'espace 32
1.3.3 Point milieu et centre de gravité 34

2 Norme et produit scalaire **37**
2.1 Norme d'un vecteur 37
2.2 Produit scalaire et perpendicularité 42
2.3 Applications du produit scalaire 50
2.3.1 Projections orthogonales (plan - espace) 50
2.3.2 Angle de deux vecteurs (plan - espace) 52
2.3.3 Calculs d'aires (plan) 55

3 Produit vectoriel **57**
3.1 Définition et propriétés 57
3.2 Applications du produit vectoriel 60
3.2.1 Angles entre deux vecteurs (espace) 61
3.2.2 Calculs d'aires (espace) 62
3.2.3 Test de coplanarité 63
3.2.4 Calculs de volumes (espace) 65

Bibliographie **67**

A Quelques éléments de solutions **I**
A.1 Vecteurs, composantes - points, coordonnées I
A.2 Norme et produit scalaire VIII
A.3 Produit vectoriel XIV

Index **XVIII**

Malgré le soin apporté lors de sa conception et surtout parce qu'il n'a jamais été utilisé en classe, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

`jeanphilippe.javet@vd.educanet2.ch`

Merci ;-)

1

Vecteurs, composantes - points, coordonnées

1.1 Les vecteurs

1.1.1 La notion de vecteur

Définition: Un **vecteur** non nul est caractérisé par la donnée de trois éléments : une **direction**, un **sens** et une **longueur** (appelée aussi **norme**).

Pour dessiner un vecteur, on choisit un point à partir duquel on trace une flèche qui a la direction, le sens et la longueur souhaités.

de même direction de même sens de même longueur

Un **vecteur nul** est un vecteur de longueur zéro. Sa direction et son sens ne sont pas définis. Un tel vecteur se dessine à l'aide d'un point.

On note généralement les vecteurs à l'aide de minuscules surmontées d'une flèche : $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

Pour deux points A et B, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur qui peut se dessiner à l'aide d'une flèche joignant A à B.

Le vecteur nul est noté $\vec{0}$. Pour tout point P, on a $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.

Définition: On note V_2 l'ensemble de tous les vecteurs du plan et V_3 l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace.

---

3 critères: Citons trois critères exprimant l'égalité entre deux vecteurs :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad &\Longleftrightarrow \quad ABCD \text{ est un parallélogramme (éventuellement dégénéré).}\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{La translation qui envoie } A \text{ sur } B \text{ envoie aussi } D \text{ sur } C.\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{Les segments } [AC] \text{ et } [BD] \text{ ont le même point milieu.}\end{aligned}$$

De cette manière, un vecteur peut être considéré comme un *ensemble de flèches* qui ont :

a) même direction,

b) même sens,

c) même longueur.

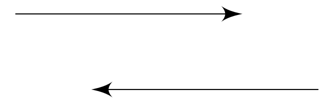
Généralement, on dessine un tel vecteur à l'aide d'*une seule* flèche, appelée **représentant**.

Exemple 1: Soit $ABCD$ un parallélogramme. Regrouper tous les représentants de chaque vecteur que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure.

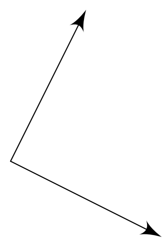
Exercice 1.1: Pour chaque paire de flèches, dire si elles sont le représentant d'un même vecteur ou pas. Justifier vos réponses en termes de : "direction" "sens" et "longueur".

a)

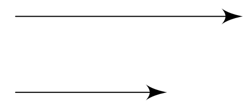
b)



c)

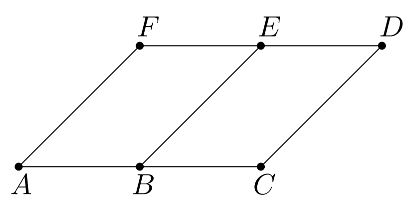


d)

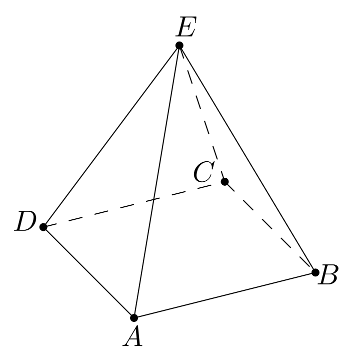


Exercice 1.2: Donner un représentant pour chaque vecteur pouvant se définir à l'aide des sommets de chacune des figures ci-dessous.

a) Parallélogramme

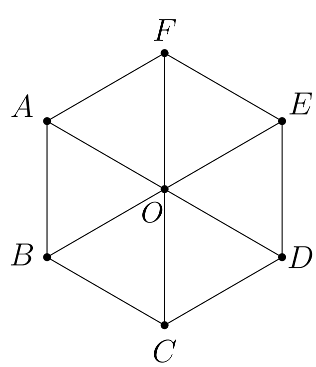


b) Pyramide à base carrée



Dans la figure qui suit, donner le nombre de représentants différents que l'on peut définir à l'aide des différentes lettres.

c) Hexagone régulier



1.1.2 Opérations sur les vecteurs du plan ou de l'espace

Définition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs.

- La **somme** (addition) $\vec{a} + \vec{b}$:

  On choisit un point A, et l'on note par B le point tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ et par C celui pour lequel $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

  Ainsi $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$:

- L'**opposé** $-\vec{a}$ de $\vec{a}$:

  On choisit un point A, et l'on note par B le point tel que $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$.

- La **différence** (soustraction) $\vec{a} - \vec{b}$:

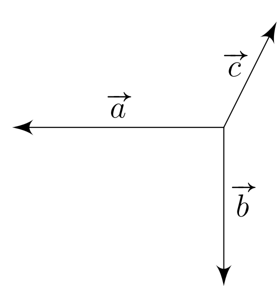
  À l'aide de ce qui précède, on définit la **soustraction** par :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

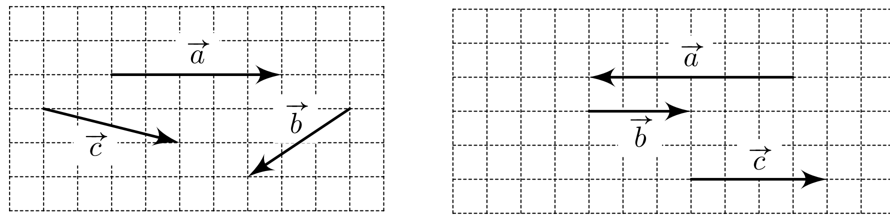
Exercice 1.3:

a) Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous.

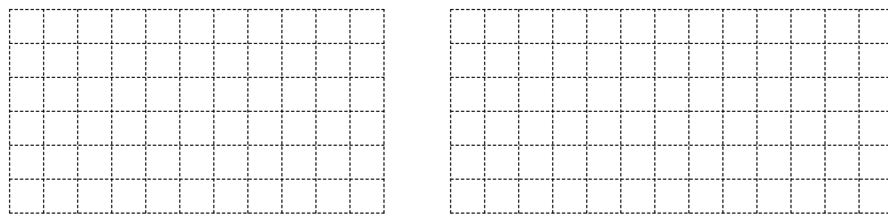
b) Représenter trois vecteurs non nuls, n'ayant pas la même direction, et dont la somme est le vecteur nul.



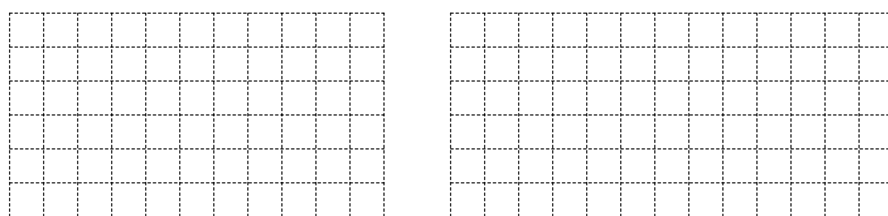
Exercice 1.4: Construire dans chacun des deux cas le vecteur demandé.



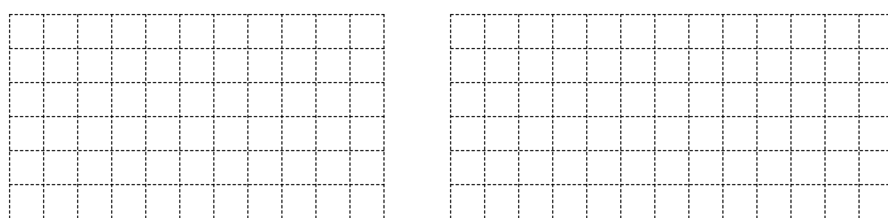
a) le vecteur $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



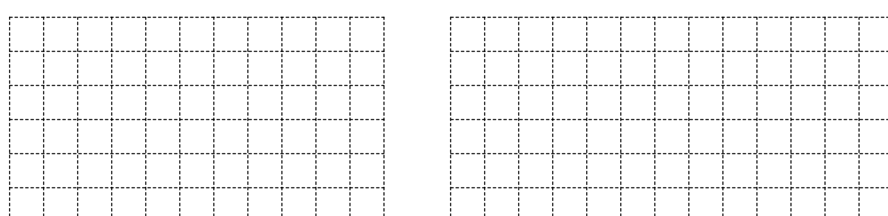
b) le vecteur $\vec{w} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$



c) le vecteur $\vec{z} = \vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$

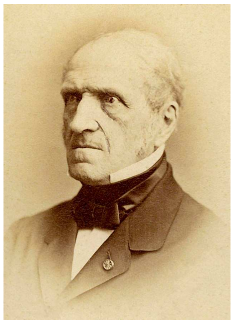


d) le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$



Propriétés: Pour tous points A, B et C, on a :

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(règle de Chasles)*
- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



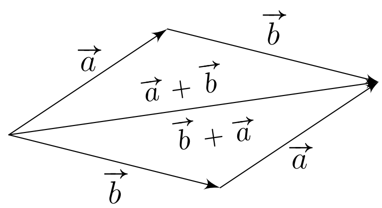
Michel Chasles
(1793 - 1880)

Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, on a :

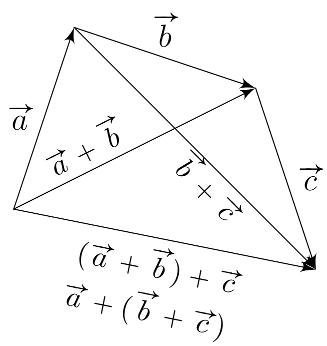
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*commutativité*)
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*associativité*)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ($\vec{0}$ *est élément neutre*)
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ($-\vec{a}$ *est l'opposé de* $\vec{a}$)

Justification: Les deux premières égalités découlent immédiatement des définitions. Les autres sont illustrées ci-dessous :

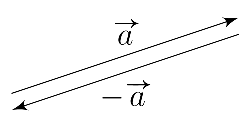
- commutatitivé :



- associativité :



- élément neutre : évident.
- opposé :



Exemple 2: Soient A, B, C, D des points quelconques de l'espace. Simplifier l'expression :

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$$

Exercice 1.5: Soit A, B, C, D et E des points quelconques du plan ou de l'espace. En utilisant la règle de Chasles, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ **d)** $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

Exercice 1.6: On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Exprimer plus simplement les vecteurs suivants :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

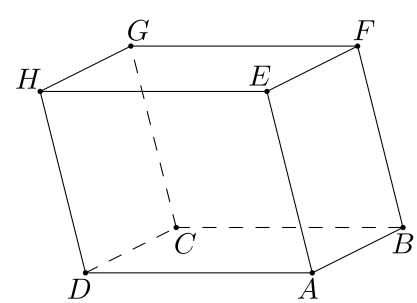
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



Définition: Soit $\vec{a}$ un vecteur et k un nombre réel. Le vecteur $k \cdot \vec{a}$ (que l'on peut également écrire $k\vec{a}$) est défini par :

a) la direction du vecteur $\vec{a}$,

b) le sens du vecteur $\vec{a}$ si $k > 0$ et le sens opposé si $k < 0$,

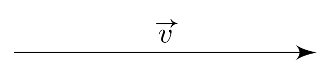
c) une longueur égale au produit de celle du vecteur $\vec{a}$ par la valeur absolue de k.

Propriétés: Quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et les nombres réels k, m, on a :

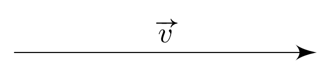
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$
- $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}$
- $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
- $k(-\vec{a}) = (-k)\vec{a} = -(k\vec{a})$
- $0\vec{a} = \vec{0}$
- $k\vec{0} = \vec{0}$

Exercice 1.7: Reproduire le vecteur $\vec{v}$ dans votre cahier puis construire (règle et compas) les vecteurs :

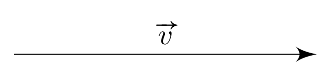
$\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{v}$



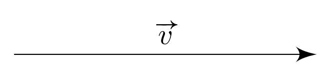
$\vec{b} = -3\vec{v}$



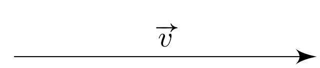
$\vec{c} = -\dfrac{3}{5}\vec{v}$



$\vec{d} = \sqrt{2}\vec{v}$

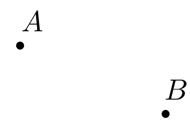


$\vec{e} = \sqrt{3}\vec{v}$

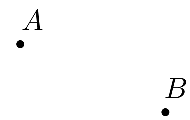


Exercice 1.8: Représenter le point P pour lequel les égalités vectorielles ci-dessous sont vérifiées :

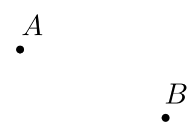
a) $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$



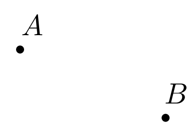
b) $\overrightarrow{PA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



c) $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{PB}$



d) $\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$



Exercice 1.9: Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.4 et représenter le vecteur :

$$\vec{v} = \vec{a} + 2\,\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$$

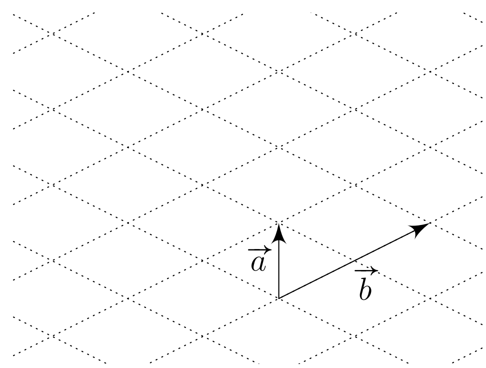
Définition: On dit que le vecteur $\vec{a}$ est **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$, s'il existe des nombres réels a_1, ..., a_n tels que :

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + ... + a_n\vec{e_n}$$

Les nombres $a_1, \ldots, a_n$ s'appellent les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple 3: Construire ci-dessous les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ définis par les combinaisons linéaires suivantes :

$$\vec{v} = 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} \qquad \text{et} \qquad \vec{w} = 2\vec{a} + \vec{b}$$



Exprimer ensuite les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

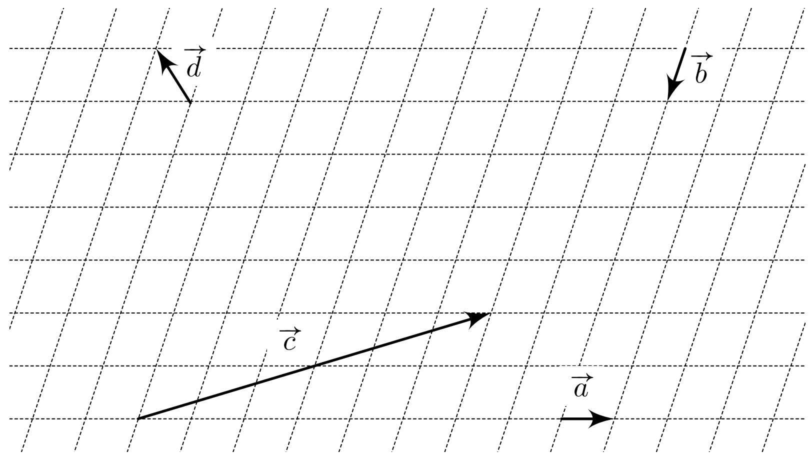
Exemple 4: Décomposer graphiquement le vecteur $\vec{x}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 1.10: Par rapport aux vecteurs de la figure ci-dessous :

a) Exprimer $\vec{c}$ puis $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b) On considère le vecteur $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$.
Exprimer $\vec{x}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

c) Exprimer $\vec{a}$ puis $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$.



Exercice 1.11: Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu de $[FG]$, N celui de $[HG]$ et P le centre de $ABCD$. Exprimer les vecteurs suivants comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{EP}\ ,\ \overrightarrow{EM}\ ,\ \overrightarrow{EN}\ ,\ \overrightarrow{NM}\ ,\ \overrightarrow{PN}\ ,\ \overrightarrow{NP}\ ,\ \overrightarrow{PM}$$

Exercice 1.12: Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de $[BC]$ et P un point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Exercice 1.13: Représenter un carré $OABC$, puis construire les points E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad , \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} \quad , \quad \overrightarrow{OH} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}$$

Exercice 1.14: Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$ si :

$$3(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\vec{b} = -7\left(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\vec{b}\right) + 12\vec{a}$$

1.1.3 La géométrie vectorielle pour démontrer...

Exemple 5: Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On désigne par M et N les points milieux respectifs de AD et BC. Montrer que :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}\right)$$

Exercice 1.15: Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E le milieu de BC, F le milieu de DC. Montrer que

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Exercice 1.16: On donne le quadrilatère $ABCD$. Soit P, Q, R et S les milieux respectifs de AB, BC, CD et DA.

a) Montrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SR}$

b) Que peut-on en déduire au sujet du quadrilatère $PQRS$?

Exercice 1.17: $ABCD$ est un parallélogramme. Les points M, N, P et Q sont tels que :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{DA}.$$

Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Exercice 1.18: Montrer que si le quadrilatère $ABCD$ admet des diagonales qui se coupent en I, leur point milieu alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 1.19: Soit cinq points O, A, B, C et D tels que :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

1.1.4 Tests de colinéarité et de coplanarité

Définition: Des vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **colinéaires** s'il est possible de les représenter sur une même droite.

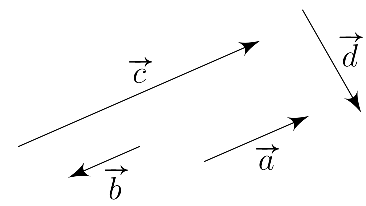
Exemple 6: Les vecteurs listés ci-dessous sont-ils colinéaires ?

a) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$

b) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$

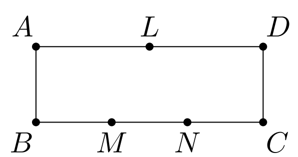
c) $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{d}$

d) $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{0}$

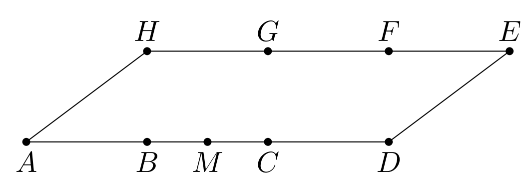


Critère: Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un d'entre eux peut s'écrire comme **le produit de l'autre par un nombre réel**.

Exemple 7: Sur le rectangle proposé, donner un représentant de chaque vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$.



Exercice 1.20: Sur le parallélogramme de la figure ci-dessous, les points G et F divisent le segment $[HE]$ en trois parties égales, les points B et C divisent $[AD]$ en trois parties égales et M est le milieu de $[BC]$. Donner un représentant de chaque vecteur colinéaire à $\overrightarrow{HG}$.



Remarque: Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les trois points A, B et C sont alignés.

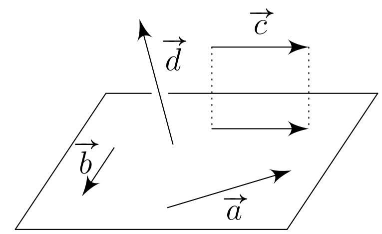
Définition: Des vecteurs de l'espace sont **coplanaires** s'il est possible de les représenter dans un même plan.

Exemple 8: Les vecteurs listés ci-dessous sont-ils coplanaires ?

a) $\vec{a}$ et $\vec{b}$

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

c) $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$

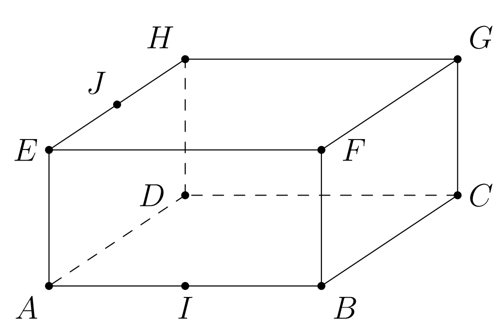


Remarque:
- Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires.
- Trois vecteurs de l'espace, dont deux sont colinéaires, sont toujours coplanaires.

Critère: Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'un de ces trois vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

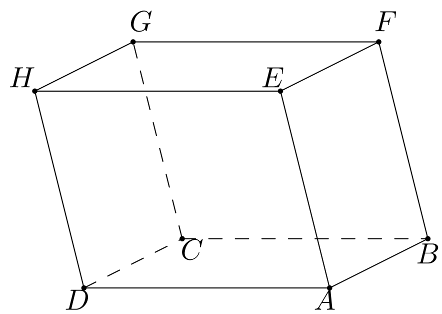
Exemple 9: Considérons le parallélépipède $ABCDEFGH$ et notons I, J les milieux des segments $[AB]$ et $[EH]$ respectivement.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

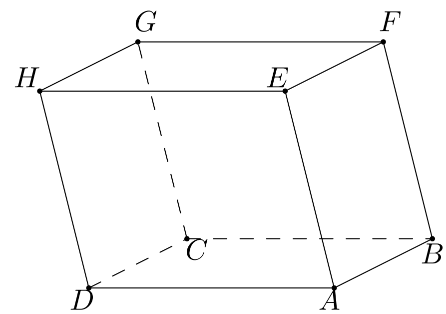


Exercice 1.21: On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur proposé comme combinaison linéaire des deux autres.

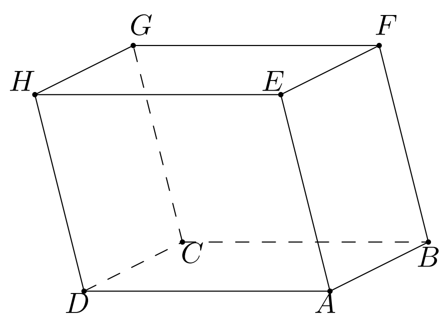
a) $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DG}$



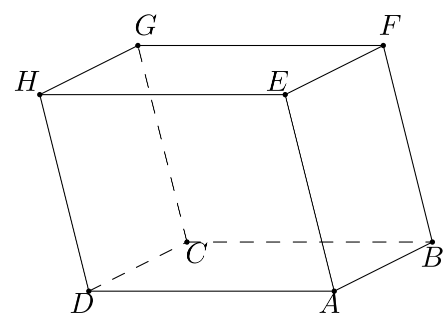
b) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{AB}$



c) $\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CD}$

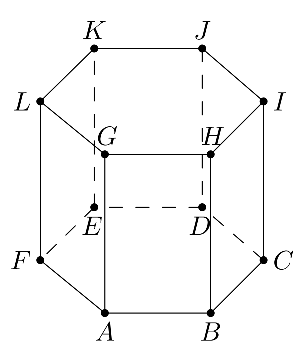


d) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{GH}$

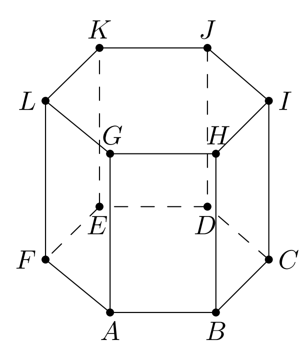


Exercice 1.22: On considère le prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer le premier vecteur proposé comme combinaison linéaire des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{BC}$

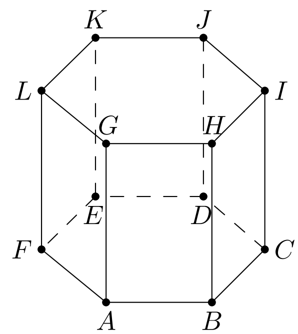


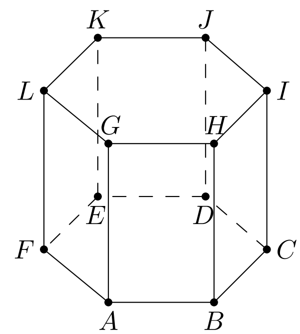
b) $\overrightarrow{LG}, \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{KB}$



Exercice 1.23: Même consigne que l'exercice précédent

a) $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{JD}, \overrightarrow{HI}$ **b)** $\overrightarrow{KF}, \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{GD}$

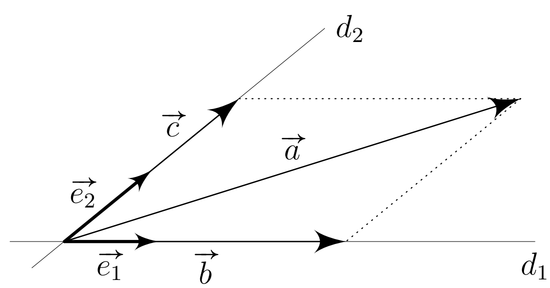




1.2 Bases et composantes

1.2.1 Dans le plan

Considérons, dans le plan, deux droites non parallèles d_1, d_2 concourantes et les deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ situés selon la figure ci-dessous. Soit encore un vecteur $\overrightarrow{a}$ quelconque.



Construisons, avec des parallèles aux droites d_1 et d_2, le parallélogramme dont l'une des diagonales correspond au vecteur $\overrightarrow{a}$. On décompose ainsi le vecteur $\overrightarrow{a}$ en une somme de deux vecteurs $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ colinéaires avec les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$. Il existe donc deux nombres réels a_1 et a_2 tels que :

$$\overrightarrow{b} = a_1\overrightarrow{e_1} \qquad \overrightarrow{c} = a_2\overrightarrow{e_2}$$

impliquant ainsi l'écriture suivante :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$$

En conclusion, *tout vecteur du plan peut s'exprimer de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs.*
Cela justifie que l'on dise parfois que le plan est de dimension 2.

Définition: Deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ du plan, qui ne sont pas colinéaires forment, dans cet ordre, une **base** de V_2, notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$.

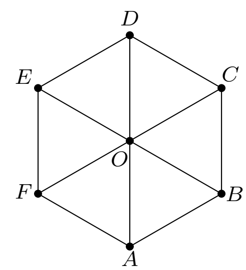
Pour chaque vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, les nombres réels a_1 et a_2, tel que $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$ s'appellent les **composantes** de $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Pour noter un vecteur, on privilégie la **notation en colonne** :

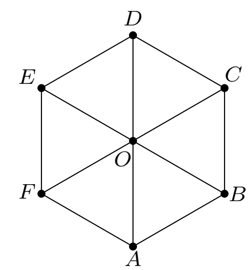
$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$$

Exemple 10: Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{DB}$ dans les deux bases :

$\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$

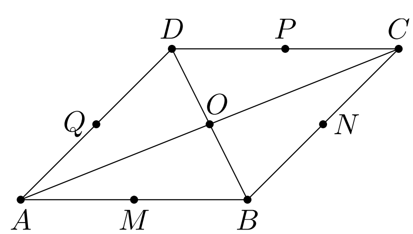


$\mathcal{B}_2 = \ (\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{DE})$



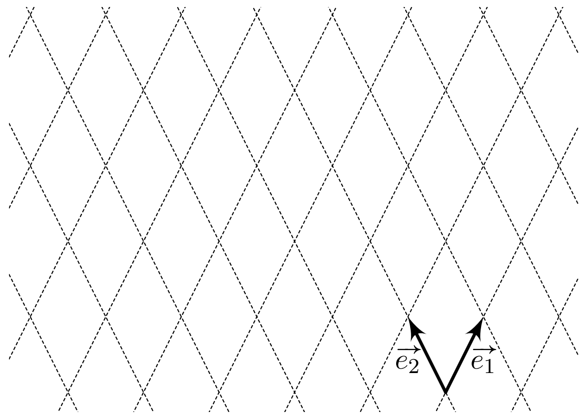
Remarque: Les composantes d'un vecteur sont définies par rapport à une base déterminée ; le changement de base implique inévitablement un changement de ses composantes.

Exercice 1.24: Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.



- Donner, dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$.
- Même question, mais relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AM})$.

Exercice 1.25: On considère la figure suivante :



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données, relativement à la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{v} = \vec{d} - \vec{c}$ et $\vec{w} = \dfrac{3}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{d}$, puis donner leurs composantes dans $\mathcal{B}$.

Règles de calcul: Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ une base du plan relativement à laquelle :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

et soit k un nombre réel. On a les 3 propriétés suivantes :

- $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$
- $k\,\vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$
- $\vec{a} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

Preuve: Cf. exercice qui suit

Exemple 11:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} =$

b) $3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

Exercice 1.26: Compléter la preuve des 3 règles de calculs proposées ci-dessus :

On a : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{b} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ Ainsi :

- $\vec{a} + \vec{b} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

  $= (\ \dots\dots\dots\dots\ )\vec{e_1} + (\ \dots\dots\dots\dots\ )\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

- $k\vec{a} = k \cdot (\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots\ ) = \dots\ \vec{e_1} + \dots\ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} = \vec{b} \iff \dots\ \vec{e_1} + \dots\ \vec{e_2} = \dots\ \vec{e_1} + \dots\ \vec{e_2}$

  $\iff \begin{cases} a_1 = \dots \\ a_2 = \dots \end{cases}$

$\square$

Exercice 1.27: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ **b)** $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$ **c)** $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Exercice 1.28: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 1.29: Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,; \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathcal{B}' = (\vec{a}\,; \vec{b})$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

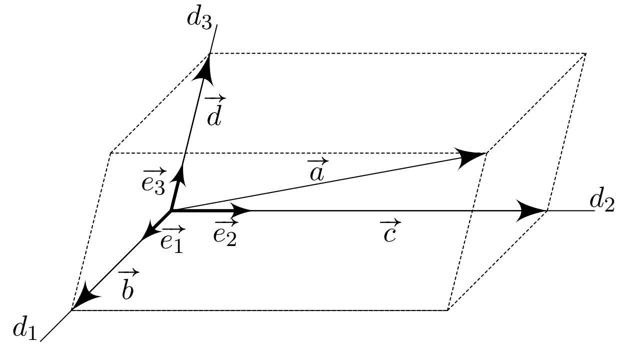
a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

1.2.2 Dans l'espace

Ce qui a été vu et défini dans le cas du plan se généralise au cas de l'espace.

Considérons, dans l'espace, trois droites non coplanaires d_1, d_2, d_3 concourantes et les trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ situés selon la figure ci-dessous. Soit encore un vecteur $\overrightarrow{a}$ quelconque.



Construisons, avec des parallèles aux droites d_1, d_2 et d_3, le parallélépipède dont l'une des diagonales correspond au vecteur $\overrightarrow{a}$. On décompose ainsi le vecteur $\overrightarrow{a}$ en une somme de trois vecteurs $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ colinéaires avec les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$. Il existe donc trois nombres réels a_1, a_2 et a_3 tels que :

$$\overrightarrow{b} = a_1\overrightarrow{e_1} \qquad \overrightarrow{c} = a_2\overrightarrow{e_2} \qquad \overrightarrow{d} = a_3\overrightarrow{e_3}$$

impliquant ainsi l'écriture suivante :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

En conclusion, *tout vecteur de l'espace peut s'exprimer de manière unique comme combinaison linéaire de trois vecteurs.*
Cela justifie que l'on dise parfois que l'espace est de dimension 3.

Définition: Trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ de l'espace, qui ne sont pas coplanaires forment, dans cet ordre, une **base** de V_3, notée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$.

Pour chaque vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, les nombres réels a_1, a_2 et a_3, tel que $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ s'appellent les **composantes** de $\overrightarrow{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$

Pour noter un vecteur, on privilégie la **notation en colonne** :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

Règles de calcul: Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$ une base de l'espace relativement à laquelle :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

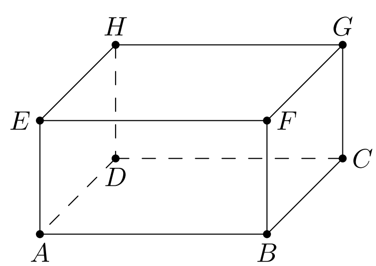
et soit k un nombre réel. On a les 3 propriétés suivantes :

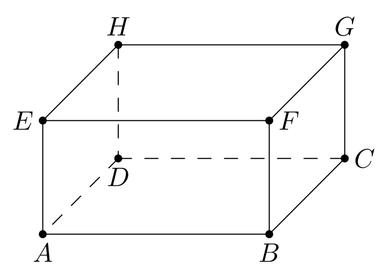
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
- $k\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

Exemple 12: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{x}$ tel que $2(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a}) = 8\overrightarrow{a} - (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{x})$, sachant que

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.30: On considère un parallélépipède $ABCD\ EFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$, S est le centre de la face $BCGF$.





a) Donner, dans la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE})$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AK}$.

b) Même question relativement à la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{BR})$.

Exercice 1.31: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Calculer le vecteur $\vec{w}$ tel que $6\left(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) + 2\vec{b} = \vec{0}$.

c) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que :

$$2\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{t}\right) + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

Exercice 1.32: Exprimer, si possible, le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.2.3 Tests de colinéarité et de coplanarité

Test de colinéarité I: Pour déterminer si deux vecteurs du plan ou de l'espace sont colinéaires, il faut vérifier si l'un est produit de l'autre par un nombre réel

Exemple 13: Les vecteurs ci-dessous sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -49/3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.33: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Dans le cas des vecteurs du plan, on dispose d'un autre critère pour déterminer la colinéarité de deux vecteurs. Il se base sur la notion de déterminant.

Définition: Relativement à une base $\mathcal{B}$ du plan, on donne :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\det(\vec{a}; \vec{b})$, le nombre défini par :

$$\det(\vec{a}\,; \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

Test de colinéarité II: Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan

$$\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont colinéaires} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\vec{a}; \vec{b}) = 0.$$

Preuve: Après l'exemple qui suit

Exemple 14: Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Preuve: *Test de colinéarité II :*

Remarquons préalablement que si au moins l'un des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est nul, alors l'équivalence est démontrée. Démontrons alors le résultat dans le cas où les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tous deux non nuls.

$(\Longrightarrow)$

Supposons que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
Il existe un réel k tel que $\vec{a} = k\,\vec{b}$. En particulier, cela implique que $a_1 = kb_1$ et $a_2 = kb_2$. Ainsi, on a :

$$\det(\vec{a}\,;\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1 = (kb_1)b_2 - (kb_2)b_1 = 0$$

$(\Longleftarrow)$

Supposons que $\det(\vec{a}\,;\vec{b}) = 0$. On a alors $a_1b_2 = a_2b_1$.
On distingue deux cas :

- si $b_1 \neq 0$, alors $a_2 = \dfrac{a_1b_2}{b_1}$, ce qui implique $\vec{a} = \dfrac{a_1}{b_1}\vec{b}$,
- si $b_1 = 0$ et $b_2 \neq 0$, alors $a_1 = 0$, ce qui implique $\vec{a} = \dfrac{a_2}{b_2}\vec{b}$.

D'où la colinéarité entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$\square$

Exercice 1.34: Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.35: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels que $\vec{x} + \lambda\,\vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 1.36: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_3, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

Test de coplanarité: Pour déterminer si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires, on effectue les étapes suivantes :

Étape 1 : On détermine si deux des vecteurs sont colinéaires, auquel cas les trois vecteurs sont coplanaires,

Étape 2 : Il suffit de choisir n'importe lequel des trois vecteurs, et de déterminer s'il peut s'écrire ou non comme combinaison linéaire des deux autres.

Exemple 15: Les vecteurs ci-dessous sont-ils coplanaires ?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.37: Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/5 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.38: Déterminer k pour que les vecteurs suivants soient coplanaires :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

1.3 Repères et coordonnées

1.3.1 Dans le plan

Nous avons vu que tout vecteur du plan pouvait être représenté par une flèche d'origine quelconque.

Si l'on décide de fixer un point noté O, à partir duquel on représente tous les vecteurs, on établit une correspondance entre l'ensemble V_2 de tous les vecteurs du plan et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de tous les points du plan :

- à tout point A de $\mathbb{R}^2$, on associe l'unique vecteur $\overrightarrow{a}$ de V_2 tel que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$,
- à tout vecteur $\overrightarrow{a'}$ de V_2, on associe l'unique point A' de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{OA'}$.

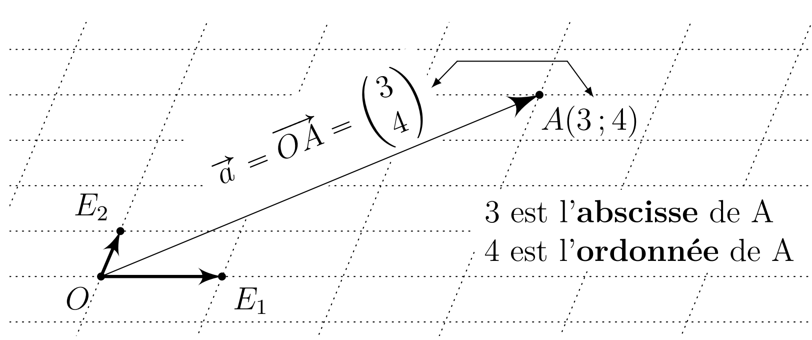
Trois points O, E_1, E_2 non alignés forment dans cet ordre un **repère** $\mathcal{R}$ du plan. On utilise la notation $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2)$ et on dit que le point O est l'**origine** du repère.

Les points O, E_1, E_2 n'étant pas alignés, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2})$ est une base du plan appelée **base associée** au repère.

Les **coordonnées** a_1 et a_2 d'un point A de $\mathbb{R}^2$ relativement au repère sont par définition les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base associée au repère. Plus succinctement :

$$A(a_1\,;a_2) \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_1 est l'**abscisse** du point A et a_2 est l'**ordonnée** du point A.



Exemple 16: Déterminer les composantes des vecteurs ci-dessous dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OE})$, ainsi que les coordonnées des points associés dans le repère $\mathcal{R} = (O\,;D\,;E)$:

$\overrightarrow{OA} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(\dots\,;\dots)$

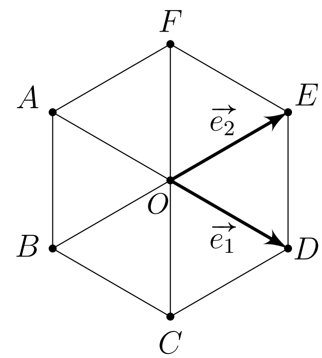
$\overrightarrow{OB} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad B(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OC} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OD} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad D(\dots\,;\dots)$

$\overrightarrow{OE} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad E(\dots\,;\dots)$

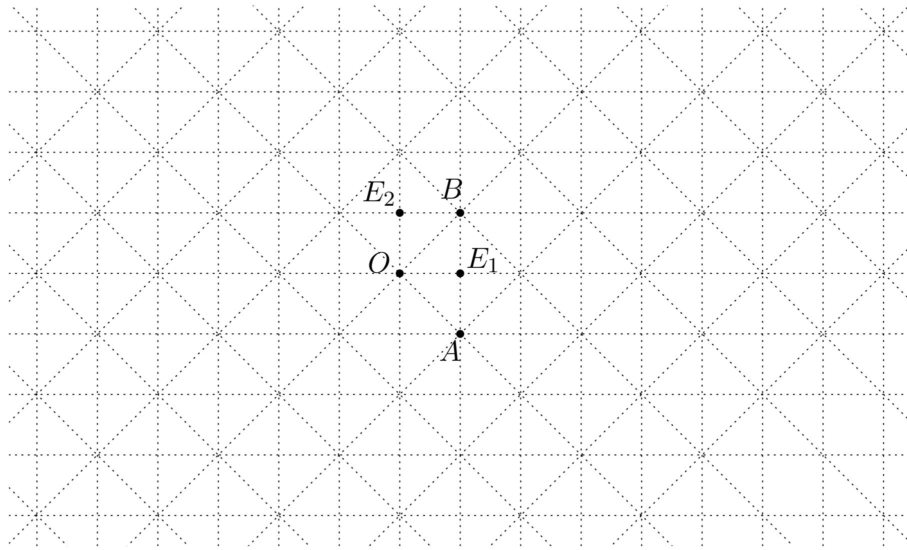
$\overrightarrow{OF} = \qquad \Longleftrightarrow \qquad F(\dots\,;\dots)$



Il est important de ne pas confondre les notations utilisées pour l'ensemble V_2 des vecteurs du plan avec celles utilisées pour l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des points du plan. Le tableau suivant rappelle les distinctions à faire :

V_2	$\mathbb{R}^2$
vecteur $\vec{a}$	point A
base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2})$	repère $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2)$
$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$A(a_1\,;a_2)$
a_1 et a_2 sont les composantes du vecteur $\vec{a}$ relativement à la base $\mathcal{B}$	a_1 et a_2 sont les coordonnées du point A relativement au repère $\mathcal{R}$

Exercice 1.39: On considère la figure suivante :



a) Représenter les points dont les coordonnées relativement au repère $\mathcal{R}_1 = (O\,;E_1\,;E_2)$ sont :

$$M(4\,;2),\ N(-3\,;3),\ P(-4\,;-4),\ Q(2\,;3),\ R(1\,;-3),$$

$$S(0\,;-3),\ T(5\,;0),\ U(-1\,;-4),\ V(-2\,;3)$$

b) Trouver les coordonnées de ces points relativement au repère $\mathcal{R}_2 = (O\,;A\,;B)$.

Les 4 Questions:

- Si $A(3\,;2)$ et $B(5\,;9)$, que vaut $\overrightarrow{AB}$?

- Si $A(-1\,;5)$ et $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, que valent les coordonnées de B ?

- Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B(1\,;5)$, que valent les coordonnées de A ?

- Si $A(a\,;7)$ et $B(-3\,;9)$, que vaut $\overrightarrow{AB}$?

Dans ce dernier cas, on pourra préférer utiliser la règle de calcul suivante :

Règle de calcul: On donne relativement à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O du plan les points $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$, alors on a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

Preuve: Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, d'où le résultat :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

□

Exercice 1.40: Calculer les composantes ou les coordonnées manquantes :

a) $A(2\,;3)$ $\quad B(-5\,;4)$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

b) $A(5\,;-1)$ $\quad B(-2\,;3)$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

c) $A(2\,;-7)$ $\quad B(\dots\,;\dots)$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $A(\dots\,;\dots)$ $\quad B(7\,;-9)$ $\quad$ et $\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $A(\dots\,;\dots)$ $\quad B(3\,;-1)$ $\quad R(1\,;0)$ $\quad \overrightarrow{AR} - 5\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Suggestion : posez x et y les 2 coordonnées et résolvez une équation

Exercice 1.41: On donne les points $A(3\,;4)$ et $B(-3\,;3)$. Calculer les points C, D, L et R pour lesquels :

$$\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA} \quad , \quad \overrightarrow{LA} = \frac{5}{3}\,\overrightarrow{LB} \quad , \quad \overrightarrow{RA} = -\frac{3}{4}\,\overrightarrow{RB}$$

<u>Suggestion</u> : Dans les 2 derniers cas, posez x et y les coordonnées inconnues et résolvez une équation

Exercice 1.42: On donne les points $A(3\,;2)$, $B(-5\,;6)$ et $C(-2\,;-3)$. Trouver les coordonnées des points L et M situés respectivement au quart du segment $[AB]$ depuis A, aux deux tiers du segment $[BC]$ depuis B.

Exercice 1.43: On donne les points $A(1\,;1)$, $B(10\,;5)$ et $C(4\,;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme.

b) $ABDC$ soit un parallélogramme.

Rappel: Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Il est important de ne pas confondre les mots "colinéaires" et "alignés". La notion d'alignement s'applique à des points, alors que celle de colinéarité s'applique à des vecteurs.

Exemple 17: Les points $A(1\,;-1)$, $B(3\,;1)$ et $C(-2\,;3)$ sont-ils alignés ?

Exercice 1.44: Les points $A(-56\,;84)$, $B(16\,;-24)$ et $C(-8\,;12)$ sont-ils alignés ?

Exercice 1.45: Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k les points sont-ils alignés ?

a) $A(1\,;2)$ $\quad B(-3\,;3)$ $\quad C(k\,;1)$

b) $A(2\,;k)$ $\quad B(7k-29\,;5)$ $\quad C(-4\,;2)$

Exercice 1.46: On donne $A(7\,;-3)$ et $B(23\,;-6)$. Déterminer le point C de l'axe des abscisses qui est aligné avec les points A et B.

Exercice 1.47: Soit f l'homothétie de centre $C(1\,;0)$ et de rapport -2, et soit g l'homothétie de centre $D(8\,;7)$ et de rapport 3.

a) Calculer le point $M = g(f(P))$, si $P(1\,;1)$.

b) Déterminer le point F tel que $F = g\left(f(F)\right)$.

1.3.2 Dans l'espace

Ce qui a été vu et défini dans le cas du plan se généralise au cas de l'espace.

Quatre points O, E_1, E_2, E_3 non coplanaires forment dans cet ordre un **repère** $\mathcal{R}$ de l'espace.
On utilise la notation $\mathcal{R} = (O\,;E_1\,;E_2\,;E_3)$ et on dit que le point O est l'**origine** du repère.

Les quatre points n'étant pas coplanaires, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2}\,;\overrightarrow{OE_3})$ est une base de l'espace appelée **base associée** au repère.

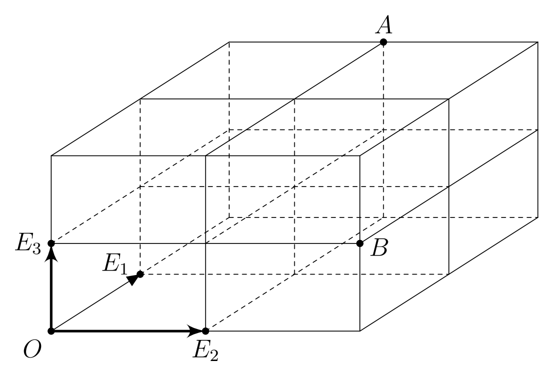
Les **coordonnées** a_1, a_2 et a_3 d'un point A de $\mathbb{R}^3$ relativement au repère sont par définition les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base associée au repère. Plus succinctement :

$$A(a_1\,;a_2\,;a_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

a_1 est l'**abscisse** du point A, a_2 est l'**ordonnée** du point A et a_3 est la **cote** du point A.

On donne relativement à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O de l'espace les points $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et $B(b_1\,;b_2\,;b_3)$, alors on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$



Exemple 18: Soit $A(2\,;1\,;-1)$ et $B(-1\,;-1\,;0)$.
Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 1.48: On donne les points $A(5\,;2\,;-3)$, $B(8\,;0\,;5)$, $C(-2\,;-4\,;-1)$ et $D(4\,;-6\,;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

e) $\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

f) $\vec{w} = 4\overrightarrow{AC} - 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC})$

Exercice 1.49: On donne les sommets $A(3\,;-2\,;5)$ et $B(7\,;5\,;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5\,;4\,;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

Exercice 1.50: Montrer que les points $A(13\,;-22\,;2)$, $B(-53\,;-10\,;26)$ et $C(-38\,;12\,;60)$ ne sont pas alignés.

Exercice 1.51: Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre k les points sont-ils alignés ?

$$A(k\,;-3\,;-4) \quad , \quad B(3\,;1\,;0) \quad \text{et} \quad C(0\,;k+2\,;k+1)$$

Exercice 1.52: Les points $A(0\,;2\,;4)$, $B(1\,;-1\,;3)$, $C(-8\,;2\,;1)$ et $D(-6\,;-4\,;-1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 1.53: On donne les trois points $M(0\,;8\,;-2)$, $P(-2\,;-1\,;7)$ et $H(3\,;-3\,;5)$.

a) Trouver les coordonnées de l'image M' de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PH}$.

b) Trouver les coordonnées de l'image M'' de M par la symétrie centrale de centre P.

c) Trouver les coordonnées de l'image M''' de M par l'homothétie de centre H et de rapport -2.

1.3.3 Point milieu et centre de gravité

Dans ce paragraphe, nous allons établir des relations permettant de calculer aisément les coordonnées du point milieu d'un segment et celles du centre de gravité d'un triangle.

Théorème: M est le point milieu du segment $[AB] \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Preuve:

Règles de calcul: Si l'on introduit les coordonnées des points relativement à un repère donné, on obtient :

- dans le cas du plan, si $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$, alors

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

- dans le cas de l'espace, si $A(a_1;a_2;a_3)$ et $B(b_1;b_2;b_3)$, alors

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Exemple 19: Soit $A(1\,;2\,;3)$ et $B(4\,;5\,;6)$.
Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment AB.

Théorème: G est le centre de gravité du triangle ABC $\iff$ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

Preuve:

Règles de calcul: Si l'on introduit les coordonnées des points relativement à un repère donné, on obtient :

- dans le cas du plan, si $A(a_1\,;a_2)$, $B(b_1\,;b_2)$ et $C(c_1\,;c_2)$, alors :

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

- dans le cas de l'espace, si $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$, $B(b_1\,;b_2\,;b_3)$ et $C(c_1\,;c_2\,;c_3)$, alors

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3};\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$$

Remarque: Lorsque l'on calcule les coordonnées d'un point milieu ou d'un centre de gravité, on effectue des **moyennes arithmétiques**.

Exemple 20: On donne $A(-1\,;2)$, $B(2\,;3)$ et $G(4\,;5)$ le centre de gravité du triangle ABC. Quelles sont les coordonnées du sommet C ?

Exercice 1.54: Soit les points $A(-4\,;2)$, $B(1\,;3)$ et $C(2\,;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

Exercice 1.55: Calculer les coordonnées de l'extrémité A du segment $[AB]$ connaissant $B(-2\,;2)$, ainsi que son point milieu $M(1\,;4)$.

Exercice 1.56: Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6\,;-1)$, $B(-2\,;6)$ et le centre de gravité $G(3\,;4)$.

Exercice 1.57: On connaît les sommets $A(2\,;-3)$ et $B(-5\,;1)$ du triangle ABC. On sait de plus que le centre de gravité du triangle ABC se trouve sur l'axe Ox et que le sommet C se trouve sur l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées du sommet C.

Exercice 1.58: On considère les points $A(2\,;-1)$ et $B(0\,;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Trouver ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 1.59: Les points $M(2\,;-1)$, $N(-1\,;4)$ et $P(-2\,;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

2

Norme et produit scalaire

2.1 Norme d'un vecteur

Définition: La **norme** du vecteur $\overrightarrow{a}$, notée $\|\overrightarrow{a}\|$, est la longueur de l'un des représentants du vecteur $\overrightarrow{a}$.

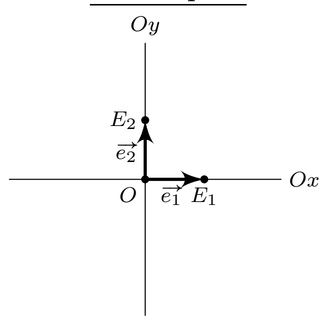
Propriétés: Soient les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et le nombre réel k, on a :

- $\|\overrightarrow{a}\| = 0 \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$
- $\|k\overrightarrow{a}\| = |k| \cdot \|\overrightarrow{a}\|$
- $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| \leqslant \|\overrightarrow{a}\| + \left\|\overrightarrow{b}\right\|$ (*inégalité triangulaire*)

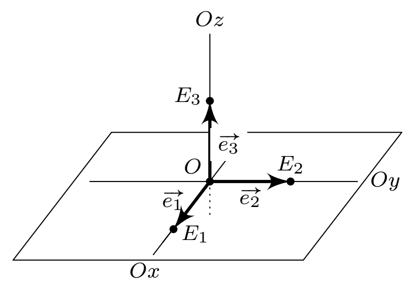
Définition: Un vecteur dont la norme est égale à 1 est dit **unitaire**.

Définition: Considérons un repère et sa base associée. On dit que ce repère est **cartésien** ou **orthonormé direct** si les vecteurs de base sont tous unitaires et si ces vecteurs sont deux à deux perpendiculaires et orientés comme sur l'une ou l'autre des figures ci-dessous.

cas du plan



cas de l'espace



Convention: Sauf mention du contraire, les bases et les repères du plan ou de l'espace seront dorénavant supposés cartésiens.

Théorème: La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ du plan est donnée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

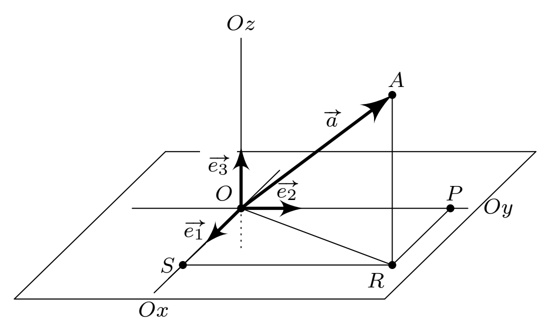
Preuve: Par le théorème de Pythagore, on conclut.

□

Théorème: La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ de l'espace est donnée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Preuve: En appliquant Pythagore sur la figure :



□

Exemple 1: Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b}$.

Exercice 2.1: **a)** Calculer les normes des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que les vecteurs suivants sont unitaires :

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.2: **a)** On donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Calculer :}$$

$$\|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\| + \|\vec{c}\| \quad , \quad \left\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right\| \quad , \quad \|-2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\|$$

$$\|\vec{a}\| \cdot \vec{c} \quad , \quad \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \quad , \quad \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\|$$

b) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que $\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$.

Exemple 2: Calculer la distance qui sépare les points $A(1\,;6\,;3)$ et $B(7\,;-2\,;3)$.

Le calcul de la norme nous permet de connaître une longueur sans avoir à faire une figure à l'échelle et devoir mesurer sur celle-ci.

Exercice 2.3: Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2\,;1\,;3)$, $B(4\,;3\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-9)$.

Exercice 2.4: Établir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6\,;4)$, $B(12\,;-2)$ et $C(17\,;9)$.

Exercice 2.5: Soit $A(7\,;1)$, $B(5\,;5)$, $C(5\,;-3)$ et $I(2\,;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

Exercice 2.6: On considère le triangle ABC dont on donne les coordonnées des sommets $A(3\,;1)$, $B(2\,;3)$ et $C(6\,;5)$. Montrer que ce triangle est rectangle et préciser en quel sommet se trouve l'angle droit.

Exercice 2.7: Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange, si $A(4\,;0\,;-3)$, $B(10\,;2\,;0)$, $C(8\,;-1\,;6)$ et $D(2\,;-3\,;3)$.

Exercice 2.8: Montrer que les points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre régulier, si $A(0\,;11\,;7)$, $B(20\,;10\,;0)$, $C(15\,;23\,;16)$ et $D(15\,;2\,;19)$.

Théorème: Si $\vec{a} \neq \vec{0}$, alors le vecteur $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, noté $\vec{a}_u$, est un vecteur unitaire, de même direction et de même sens que $\vec{a}$.

Preuve:

- $\vec{a}_u$ est un vecteur de même direction que $\vec{a}$ car colinéaire à $\vec{a}$.
- $\vec{a}_u$ de même sens que $\vec{a}$ car $1/\|\vec{a}\|$ est positif.
- Il reste à démontrer que le vecteur $\vec{a}_u$ est unitaire :

$$\|\vec{a}_u\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\square$

Exemple 3: Déterminer le vecteur $\vec{b}$ unitaire, qui est colinéaire et de sens opposé à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 4: Soit les points $A(1\,;6\,;3)$ et $B(7\,;-2\,;3)$.
Déterminer les points de la droite AB qui sont situés à une distance égale 2 du point A.

Exercice 2.9: Déterminer les vecteurs qui sont colinéaires à $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et qui sont d'une longueur égale respectivement à 1, 15 et 7.

Exercice 2.10: On donne les points $A(4\,;-1)$ et $B(-5\,;11)$. Déterminer les points de la droite AB qui sont situés à une distance 3 de A.

Exercice 2.11: Déterminer le point d'abscisse 1 qui est équidistant de $A\left(\frac{1}{2}\,;3\right)$ et de $B\left(\frac{9}{2}\,;1\right)$.

Exercice 2.12: Déterminer k pour que le point $P(2\,;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment $[AB]$, si $A(5\,;3)$ et $B(-2\,;k)$.

Exercice 2.13: Déterminer le point de l'axe Oy qui est situé à la même distance des points $A(3\,;4\,;-7)$ et $B(-1\,;2\,;1)$.

2.2 Produit scalaire et perpendicularité

Définition: Deux vecteurs non nuls sont dits **perpendiculaires** (ou **orthogonaux**) si l'on peut les représenter par deux représentants perpendiculaires partant d'un même point.

Théorème: Les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ du plan sont perpendiculaires si et seulement si le nombre $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ est nul.

Preuve: En exercice

Ce résultat motive ainsi la définition suivante :

Définition: soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

Le nombre noté et défini par :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Le théorème et cette dernière définition se généralisent au cas de l'espace et débouchent sur la définition et le critère qui suivent :

Définition: Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V_3.

Le nombre noté et défini par :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Critère de perpendicularité: Deux vecteurs non nuls de V_2 ou de V_3 sont perpendiculaires (ou orthogonaux) si et seulement si leur produit scalaire est égal à zéro.

Exemple 5: **a)** Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Déterminer la ou les valeur(s) du réel k pour que les vecteurs $\begin{pmatrix} k \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k-1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice 2.14: Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

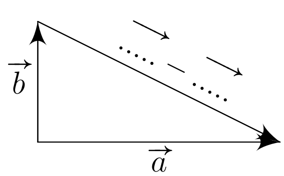
e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ **h)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exercice 2.15: Compléter la preuve du théorème précédent :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$$

Par le théorème de Pythagore, on a :



$$\begin{aligned}
\vec{a} \perp \vec{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \left\|\overrightarrow{\ldots} - \overrightarrow{\ldots}\right\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ldots\ ^2 + \ldots\ ^2 + \ldots\ ^2 + \ldots\ ^2 \\
&\qquad\qquad = (\ldots - \ldots)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \\
&\qquad\qquad = a_1^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1^2 + a_2^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots + b_2^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 = -2\ldots\ldots\ldots - 2\ldots\ldots\ldots \\
&\Longleftrightarrow \quad a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0
\end{aligned}$$

□

Exercice 2.16: On donne les points $A(-4\,;-3)$, $B(2\,;0)$ et $C(0\,;4)$. Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires. Déterminer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 2.17: Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, puis calculer son aire, si $A(7\,;5)$, $B(8\,;7)$, $C(12\,;5)$ et $D(13\,;2)$.

Exercice 2.18: Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ soient perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.19: On donne les points $A(-2\,;4)$, $B(1\,;-2)$ et $C(\lambda\,;\lambda)$. Déterminer λ pour que le triangle ABC soit rectangle :

a) en A,

b) en B,

c) en C.

Représenter les solutions trouvées dans un repère cartésien.

Exercice 2.20: On donne les points $A(-2\,;3\,;-2)$ et $B(-6\,;-1\,;1)$. Calculer le point P qui est situé sur l'axe Ox, et tel que le triangle APB soit rectangle en P.

Exercice 2.21: On donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \;;\; \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Évaluer et comparer les expressions suivantes *lorsqu'elles sont définies*.

a) $\vec{a} \bullet (7\vec{b} + \vec{c})$ **b)** $\vec{a} \bullet 7\vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ **c)** $\vec{a} + (\vec{b} \bullet \vec{c})$

d) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} - \vec{b})$ **e)** $\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$ **f)** $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{b}$

Propriétés: Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ des vecteurs et k un nombre réel.

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (*commutativité*)
- $(k\vec{a}) \bullet \vec{b} = k(\vec{a} \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (k\vec{b})$
- $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (*distributivité I*)
- $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$ (*distributivité II*)
- $\vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

Preuve: En exercice

Exercice 2.22: *Dans cet exercice, on démontrera 4 des 5 propriétés énoncées ci-dessus en dimension 2. La preuve est analogue en dimension 3, en ajoutant une troisième composante aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

Compléter la démonstration de ces différentes propriétés :

Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \vec{b} \bullet \vec{a}$

- $(k\vec{a}) \bullet \vec{b} = (k\ \ldots\ )\ \ldots + (k\ \ldots\ )\ldots = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

  $= k(\ \ldots\ldots + \ldots\ldots\ ) = k(\vec{a} \bullet \vec{b})$

  et $\vec{a} \bullet (k\vec{b}) = \ldots(\ \ldots\ ) + \ldots(\ \ldots\ ) = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

  $= k(\ \ldots\ldots + \ldots\ldots\ ) = k(\vec{a} \bullet \vec{b})$

- $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \ldots + \ldots \\ \ldots + \ldots \end{pmatrix}$

  $= \ldots\ (\ldots + \ldots) + \ldots\ (\ldots + \ldots)$

  $= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

  $= \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

  $= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

- $\vec{a} \bullet \vec{a} = \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = \ldots^2 + \ldots^2 = \|\vec{a}\|^2$

□

Exercice 2.23: *On propose dans cet exercice de démontrer par un calcul de produit scalaire que les diagonales d'un losange se coupent à angle droit.*

Considérons un losange $ABCD$ dans lequel on pose :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

a) Expliciter les vecteurs diagonaux $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Prouver alors que les diagonales AC et BD du losange sont perpendiculaires.

Le théorème qui suit nous permettra, lorsque l'on travaille dans le plan, de déterminer les deux vecteurs perpendiculaires à un vecteur connu.

Théorème: Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, alors :

- tous les vecteurs de la forme $k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, avec $k \neq 0$, sont perpendiculaires à $\vec{a}$.
- En particulier, les vecteurs $\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{a}'_\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires à $\vec{a}$ et admettent la même norme que $\vec{a}$.

Preuve:

- On a $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -k \cdot a_2 \\ k \cdot a_1 \end{pmatrix} = a_1(-ka_2) + a_2ka_1$

$$= -a_1ka_2 + a_2ka_1 = 0,$$

ce qui implique que les vecteurs sont perpendiculaires. Ce résultat est vrai en particulier pour $k = 1$. De plus, on a :

- $\|\vec{a}_\perp\| = \left\| \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-a_2)^2 + a_1^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\| = \|\vec{a}\|$

$\square$

Exemple 6: Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de norme 5. Déterminer un vecteur $\vec{b}$ perpendiculaire à $\vec{a}$ de norme 2.

Exemple 7: Soit $A(1\,;2)$ et $B(-2\,;6)$. Déterminer le sommet C d'un triangle ABC rectangle en B et d'aire égale à 25.

Exercice 2.24:

a) Former les vecteurs $\vec{v}$ qui sont perpendiculaires au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et de même longueur que ce dernier.

b) On donne le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Quels sont les vecteurs $\vec{v}$ qui sont perpendiculaires à $\vec{t}$ et d'une longueur moitié de celle de $\vec{t}$.

c) Déterminer un vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire au vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ et de longueur égale à 10.

Exercice 2.25: On donne les sommets $A(1\,;3)$ et $C(7\,;9)$ d'un losange $ABCD$.

a) Déterminer les coordonnées du point M, intersection des diagonales du losange.

b) Déterminer les coordonnées des sommets B et D pour que la diagonale $[BD]$ ait une longueur double de celle de la diagonale $[AC]$.

Exercice 2.26: On donne les points $A(2\,;1)$ et $B(3\,;-5)$.

a) Représenter sur une figure à l'échelle les sommets des carrés vérifiant que :

- $[AB]$ est un des côtés du premier carré.
- $[AB]$ est une diagonale du deuxième carré

b) Déterminer ensuite par calcul uniquement les coordonnées des divers points de cette figure.

Exercice 2.27: On donne les points $A(1\,;5)$ et $B(4\,;9)$. Déterminer les coordonnées des 2 autres sommets des rectangles de côté AB admettant une aire égale à 50.

Exercice 2.28: On donne $B(4\,;8)$ et $C(9\,;-4)$. Déterminer le point A, d'abscisse positive, pour lequel ABC est un triangle isocèle en A d'aire égale à 169.

Remarque: Dans l'espace, une formule analogue ne peut malheureusement exister, puisqu'il existe une infinité de vecteurs perpendiculaires à un vecteur fixé.

2.3 Applications du produit scalaire

2.3.1 Projections orthogonales (plan - espace)

Définition: Soit $\overrightarrow{b}$ un vecteur non nul et $\overrightarrow{a}$ un vecteur quelconque. On appelle **projection orthogonale** de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$, noté $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})$, l'unique vecteur qui est colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{b}$ et tel que le vecteur $-\overrightarrow{a} + \mathrm{proj}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})$ soit perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{b}$.

Exercice 2.29: Représenter les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire et déterminer graphiquement les composantes des vecteurs $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})$ et $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{b})$.

Théorème: La projection orthogonale de $\overrightarrow{a}$ sur $\overrightarrow{b}$ dans le plan ou dans l'espace vérifie :

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a}) = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2}\overrightarrow{b} \qquad \text{et} \qquad \left\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a})\right\| = \frac{|\,\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\,|}{\left\|\overrightarrow{b}\right\|}$$

Preuve: En exercice ci-dessous.

Exemple 8: Déterminer la proj. orthogonale de $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.30: Compléter la preuve du théorème précédent :

- D'une part, $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ étant .... à $\vec{b}$, on a :

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = k \cdot \ldots. \tag{1}$$

- D'autre part, $-\vec{a} + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ étant .... à $\vec{b}$, on a :

$$(-\vec{a} + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})) \bullet \vec{b} = \ldots \iff$$

$$\ldots \bullet \ldots + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) \bullet \ldots = 0 \tag{2}$$

En substituant (1) dans (2), on obtient :

$$-\vec{a} \bullet \vec{b} + k \cdot \ldots \bullet \vec{b} = 0 \iff -\vec{a} \bullet \vec{b} + k\left\| \ldots \right\|^2 = 0$$

$$\iff k = \frac{\ldots \bullet \ldots}{\left\| \ldots \right\|^2} \tag{3}$$

En substituant (3) dans (1), on obtient bien la première formule :

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}\vec{b}.$$

La deuxième formule :

$$\left\|\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right\| = \left\| \frac{\ldots \bullet \ldots}{\left\| \ldots \right\|^2}\vec{b} \right\| = \frac{|\ \vec{a} \bullet \ldots\ |}{\left\| \ldots \right\|^2}\left\|\vec{b}\right\| = \frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\left\|\vec{b}\right\|}.$$

$\square$

Exercice 2.31: Calculer les vecteurs $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ et $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b})$, si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Exercice 2.32: On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Décomposer le vecteur $\vec{a}$ en une somme de deux vecteurs, le premier parallèle à $\vec{b}$, le second perpendiculaire à $\vec{b}$.

Exercice 2.33: On donne les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(4\,;8\,;-3)$ et $C(6\,;3\,;2)$, et on considère le triangle ABC.

a) Calculer la longueur de la hauteur issue de C.

b) Évaluer l'aire du triangle ABC.

2.3.2 Angle de deux vecteurs (plan - espace)

Définition: L'**angle** de deux vecteurs est égal à l'angle formé par deux flèches partant du même point et représentant ces vecteurs.

Proposition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs non nuls du plan ou de l'espace.

L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} > 0$

L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est obtus $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} < 0$

L'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est droit $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Preuve: Les vecteurs $\operatorname{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ et $\vec{b}$ étant colinéaires, on a :

$$\operatorname{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = k\,\vec{b}, \text{ avec } k = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}.$$

Comme $\left\|\vec{b}\right\|^2 > 0$, les nombres k et $\vec{a} \bullet \vec{b}$ ont même signe. On en déduit alors :

- l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu $\iff k > 0 \iff \vec{a} \bullet \vec{b} > 0$
- l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est obtus $\iff k < 0 \iff \vec{a} \bullet \vec{b} < 0$
- l'angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est droit $\iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

$\square$

Exemple 9: Montrer que l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est obtus.

Exercice 2.34: Indiquer si l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est aigu, obtus ou droit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.35: Soit $A(1\,;2)$, $B(5\,;5)$ et $C(0\,;20)$ les sommets d'un triangle.

a) Calculer les coordonnées du pied P de la hauteur issue de C.

b) Calculer les coordonnées du symétrique de C par rapport à la droite AB.

c) Un des angles du triangle ABC est obtus. Lequel ?

Théorème: Si α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ du plan ou de l'espace, on a :

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$$

Preuve: Par la proposition précédente, on a :

- si α est aigu :

$$\cos(\alpha) = \frac{\left\|\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\|\vec{b}\|}}{\|\vec{a}\|} = \frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{a}\|}$$

$$= \frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

- si α est droit :

$$\cos(\alpha) = 0 = \frac{0}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

- si α est obtus :

$$\cos(\alpha) = \cos(180° - \beta) = -\cos(\beta) = -\frac{\left\|\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right\|}{\|\vec{a}\|}$$

$$= -\frac{\frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\|\vec{b}\|}}{\|\vec{a}\|} = -\frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Ainsi dans les 3 cas : $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}\right)$

$\square$

Exemple 10: Calculer l'angle en B du triangle ABC, où

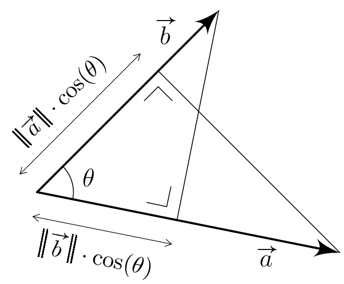
$$A(-2\,;6) \qquad B(-3\,;4) \quad \text{et} \quad C(-4\,;3).$$

Remarque: Le produit scalaire est un outil mathématique que l'on utilise fréquemment en physique. Il permet, en mécanique par exemple, de décrire le *travail d'une force*, l'*énergie potentielle* ou la *puissance d'une force*.

Notons alors que les physiciens le définissent par :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta)$$

Le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ est le produit de la norme de l'un des vecteurs ($\|\vec{a}\|$ par exemple.) par la composante de l'autre vecteur dans la direction du premier $\left(\|\vec{b}\| \cdot \cos(\theta)\right)$.



Exercice 2.36: Calculer les angles du triangle $A(2\,;-3)$, $B(3\,;2)$ et $C(-2\,;4)$.

Exercice 2.37: Calculer les angles que la droite OA forme avec chacun des axes de coordonnées dans le cas où $A(1\,;1\,;2)$.

Exercice 2.38: On considère un cube $ABCD\,EFGH$. Notons M, N et P les milieux respectifs de $[AE]$, $[EH]$ et $[AB]$. Calculer l'angle entre les vecteurs :

a) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ **c)** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$

Exercice 2.39: On considère le quadrilatère $ABCD$ où $A(1\,;6)$, $B(4\,;5)$, $C(5\,;4)$ et $D(-3\,;4)$.

a) Calculer les angles $\angle BAD$ et $\angle BCD$.

b) Après avoir additionné la valeur de ces 2 angles, en déduire une particularité de ce quadrilatère.

2.3.3 Calculs d'aires (plan)

Théorème: Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de V_2. Si $\mathcal{A}$ désigne l'**aire du parallélogramme** construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, alors

$$\mathcal{A} = \mid \det(\vec{a}\,;\vec{b}) \mid = \mid a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \mid .$$

Preuve: En exercice ci-dessous

Remarques:

- Le nombre $\mid a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \mid$ est égal à la valeur absolue du déterminant des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Il n'est donc pas surprenant qu'elle soit égale à zéro si les deux vecteurs sont colinéaires.
- Pour calculer l'**aire d'un triangle** dans le plan, on utilisera le fait que l'aire d'un triangle ABC vaut la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exemple 11: Soit $A(-1\,;1)$, $B(1\,;-3)$ et $C(7\,;5)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2.40: Compléter la preuve de la formule de l'aire ci-dessus :

$$\mathcal{A} = \|\vec{b}\| \cdot \left\|\mathrm{proj}_{\vec{b}_\perp}(\ \ldots\ )\right\| = \|\vec{b}\| \cdot \frac{\mid \ldots \bullet \ldots \mid}{\|\ \ldots\ \|}$$

$$= \sqrt{\ \ldots^2 + \ \ldots^2} \cdot \frac{\left|\begin{pmatrix} \ldots \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_2 \\ \ldots \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{b_2^2 + b_1^2}} = \mid a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \mid$$

$\square$

Exercice 2.41: On considère le parallélogramme $ABCD$ défini par trois de ses sommets :

$$A(2\,;1) \quad B(5\,;3) \quad C(7\,;9)$$

a) Calculer les coordonnées de sommet D.

b) Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$

Exercice 2.42: Calculer l'aire du triangle ABC, si $A(3\,;-1)$, $B(-1\,;2)$ et $C(7\,;5)$.

Exercice 2.43: Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$, si $A(3\,;0)$, $B(1\,;4)$, $C(-5\,;-1)$ et $D(0\,;-6)$.

Exercice 2.44: L'aire du triangle ABC vaut 3 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Ox. Déterminer les coordonnées du sommet C connaissant $A(3\,;1)$ et $B(1\,;-3)$.

Exercice 2.45: On considère le triangle ABC dont on donne les coordonnées des sommets :

$$A(2\,;-1) \qquad B(-1\,;3) \quad \text{et} \quad C(5\,;5)$$

a) Déterminer l'aire du triangle ABC.

b) Calculer la longueur de chacune des 3 hauteurs du triangle.

3

Produit vectoriel

3.1 Définition et propriétés

Exercice 3.1: Déterminer les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{c}$ qui soit perpendiculaire simultanément aux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Définition: On considère les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ relativement à une base orthonormée :

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On appelle **produit vectoriel** des vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, noté $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Propriété géométrique: Soit $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ des vecteurs de V_3.

Le vecteur $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ est orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

Preuve: Montrons que $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \bullet \overrightarrow{a} = 0$ et $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \bullet \overrightarrow{b} = 0$

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \bullet \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= a_2b_3a_1 - a_3b_2a_1 - a_1b_3a_2 + a_3b_1a_2 + a_1b_2a_3 - a_2b_1a_3 = 0.$$

De manière similaire, on a que $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \bullet \overrightarrow{b} = 0$.

Exercice 3.2: On donne les vecteurs : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer :

$$\vec{a} \times \vec{b}\ ,\ \vec{a} \times \vec{c}\ ,\ \vec{b} \times \vec{c}\ ,\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}\ ,\ (2\vec{a}) \times (-3\vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\ ,\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\ ,\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

Propriétés algébriques:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

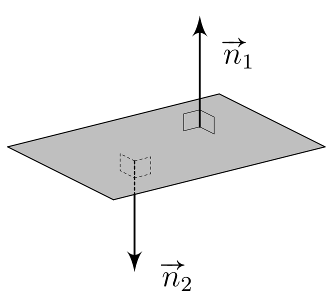
Preuve: Cf. exercice ci-dessous.

Exercice 3.3: Effectuer les preuves des propriétés ci-dessus.

Exercice 3.4: En utilisant les propriétés ci-dessus, simplifier l'expression :

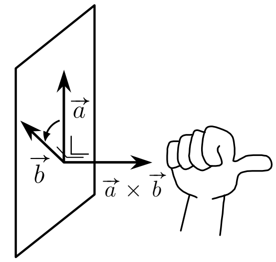
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

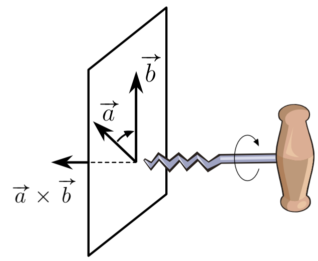
Exercice 3.5: Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan ABC, si $A(0\,;2\,;1)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(1\,;0\,;2)$.



Sens de $\vec{a} \times \vec{b}$: Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et dont le sens est donné par la "règle de la main droite" :

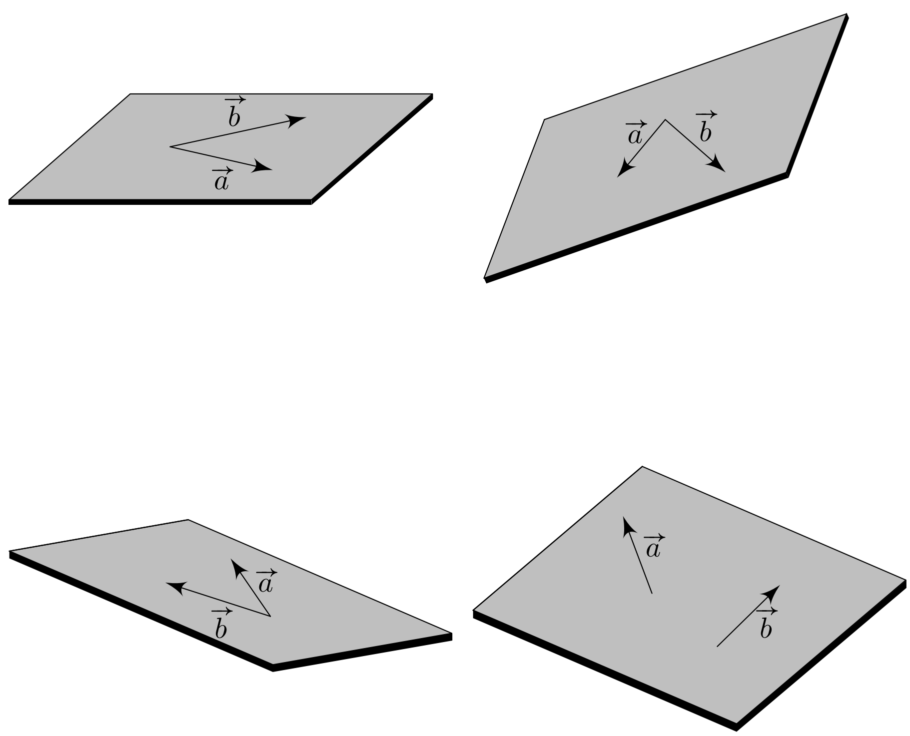
Si on tient la main droite de telle sorte que les doigts, en se refermant, indiquent la direction de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$ par le plus petit des angles, alors le pouce indique la direction de $\vec{a} \times \vec{b}$.



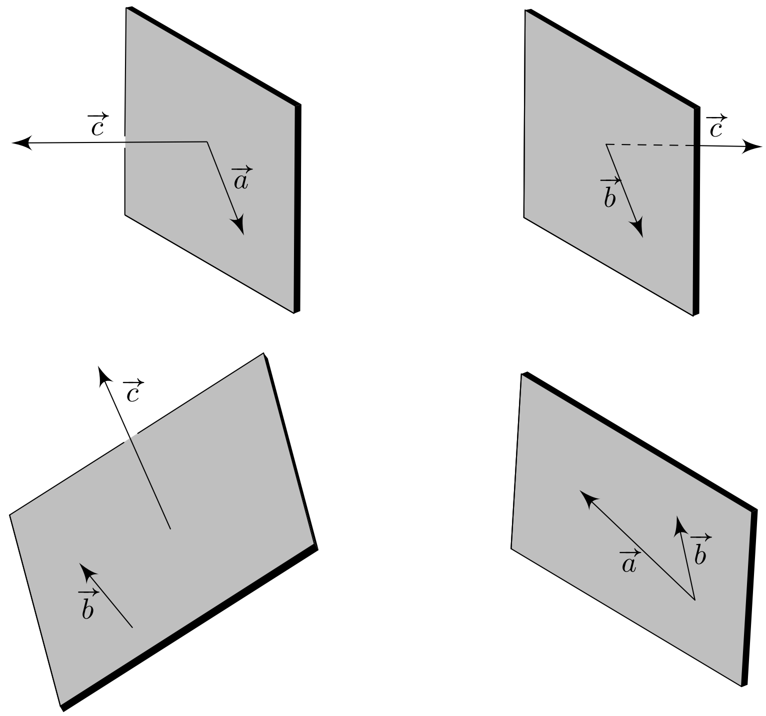


Comme autre moyen mnémotechnique, on parle aussi volontiers de la "règle du tire-bouchon" représenté ci-contre.

Exercice 3.6: Représenter le 3e vecteur tel que $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$



Exercice 3.7: Même consigne que l'exercice précédent



3.2 Applications du produit vectoriel

L'égalité suivante fournit un lien entre le produit vectoriel et le produit scalaire :

Identité de Lagrange: $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$

Preuve: En exercice ci-dessous.

Exercice 3.8: On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Vérifier avec ces vecteurs l'identité de Lagrange.

Exercice 3.9: Démontrer l'identité de Lagrange.

3.2.1 Angles entre deux vecteurs (espace)

Proposition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs de l'espace, on a :

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\theta)$$

où $\theta \in [0°; 180°]$ est l'angle géométrique entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Preuve: Par l'identité de Lagrange, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot \cos^2(\theta) \\
&= \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot (1 - \cos^2(\theta)) \\
&= \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 \cdot \sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée de cette expression, on obtient le résultat qu'il fallait démontrer.

□

Exercice 3.10: Calculer l'angle[1] aigu que forme la droite OC avec le plan ABC, si $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(2\,;2\,;-4)$.

Exercice 3.11: On donne un tétraèdre de sommets $A(1\,;-5\,;2)$, $B(3\,;-6\,;0)$, $C(-3\,;6\,;15)$ et $D(6\,;5\,;-3)$. Calculer l'angle[2] aigu que forment les faces ABC et ABD.

Remarque: Le produit vectoriel est un outil que l'on utilise également en physique. Il permet, par exemple, de décrire le *moment d'une force*, ou la *force sur une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique*. Notons alors que les physiciens le définissent par :

> Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est un vecteur $\vec{c}$. On écrit ce produit $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.
>
> - La grandeur de $\vec{c}$ est défini par l'expression
>
> $$c = a \cdot b \cdot \sin(\theta)$$
>
> où θ est l'angle (le plus petit des deux) compris entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
> - La direction de $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Son sens est défini par la *règle de la main droite*.
>
> Mécanique – Halliday & Resnick

1. L'*angle entre une droite et un plan* se calcule à l'aide d'un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal au plan.
2. L'*angle entre deux plans* se calcule à l'aide des vecteurs normaux à chacun des plans.

3.2.2 Calculs d'aires (espace)

Proposition: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ des vecteurs de l'espace.

L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$$

Preuve: Par ce qui précède, on a :

$$\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin(\theta) = \|\vec{a}\| \cdot h$$

qui est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

□

Exemple 1: Calculer l'aire du triangle ABC, connaissant les points $A(-1\,;2\,;-5)$, $B(5\,;4\,;0)$ et $C(11\,;8\,;3)$.

Exercice 3.12: Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire, si $A(2\,;1\,;-2)$, $B(2\,;3\,;0)$, $C(6\,;6\,;5)$ et $D(6\,;4\,;3)$.

Exercice 3.13: Considérons le triangle ABC, avec $A(-1\,;2\,;-5)$, $B(5\,;4\,;0)$ et $C(11\,;8\,;3)$.

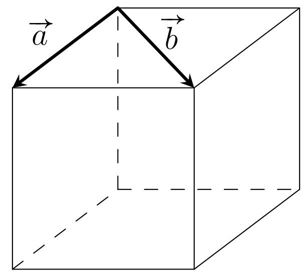
a) Calculer son aire.

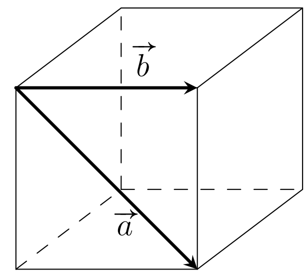
b) Déterminer la longueur de la hauteur issue de A.

Exercice 3.14: Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Prouver algébriquement que le rapport de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}-\vec{b}$ et $\vec{a}+\vec{b}$ à celle du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à 2.

Exercice 3.15: Le cube dessiné a des arêtes de longueur 1. Représenter le vecteur :

a) $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ **b)** $(\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{b}$





3.2.3 Test de coplanarité

Test de coplanarité I: Trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si $(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c} = 0$

Définition: Relativement à une base $\mathcal{B}$ de l'espace, on donne :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, noté $\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$, le nombre défini par :

$$\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

Proposition: $\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$

Preuve: En exercice ci-dessous

Exercice 3.16: Démontrer la proposition précédente :

$$\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}$$

Remarque: Pour désigner ce déterminant, on parle parfois de **produit mixte**, puisqu'il relie en une seule expression le produit scalaire et le produit vectoriel.

Test de coplanarité II: Trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de l'espace sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = 0$

Exemple 2: Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont coplanaires.

Exercice 3.17:

a) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires ?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer k pour que les vecteurs suivants soient coplanaires :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

Exercice 3.18:

a) Les points $A(0\,;3\,;-2)$, $B(2\,;3\,;0)$, $C(6\,;6\,;5)$ et $D(6\,;4\,;3)$ sont-ils coplanaires ?

b) Déterminer sur l'axe Oz un point coplanaire à $A(1\,;1\,;1)$, $B(0\,;-2\,;3)$ et $C(4\,;1;\,-1)$.

3.2.4 Calculs de volumes (espace)

Proposition: Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ des vecteurs de l'espace.

- Le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est donné par :

$$\mathcal{V} = \left|\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,)\right|$$

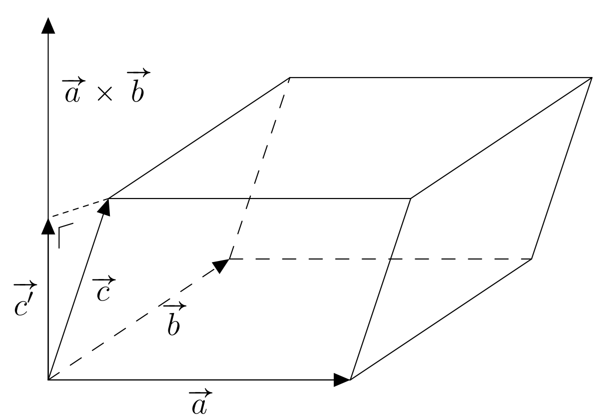
- Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre construit sur les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,)\right|$$

Preuve: En exercice ci-dessous

Exercice 3.19: À l'aide de la figure d'étude ci-dessous, démontrer la formule :

$$\mathcal{V}_{paral} = \left|\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,)\right|$$



Où $\vec{c'}$ correspond à $proj_{\vec{a}\times\vec{b}}(\vec{c}\,)$ et ainsi $\left\|\vec{c'}\right\|$ correspond à la hauteur du parallélépipède

Exercice 3.20: À l'aide de l'exercice précédent, démontrer la formule :

$$\mathcal{V}_{tétra} = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\,)\right|$$

Exemple 3: Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$, connaissant les points $A(-1\,;2\,;-5)$, $B(5\,;4\,;0)$, $C(11\,;8\,;3)$ et $D(10\,;0\,;0)$.

Exercice 3.21:

a) Calculer le volume du parallélépipède $ABCD\ EFGH$, si $A(-1\,;-1\,;7)$, $B(-2\,;1\,;6)$, $C(0\,;1\,;6)$, $D(1\,;-1\,;7)$, $E(2\,;-2\,;3)$, $F(1\,;0\,;2)$, $G(3\,;0\,;2)$, $H(4\,;-2\,;3)$.

b) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$, si $P(2\,;-1\,;1)$, $Q(5\,;5\,;4)$, $R(3\,;2\,;-1)$, $S(4\,;1\,;3)$.

c) Soit $A(2\,;1\,;-1)$, $B(3\,;0\,;1)$, $C(2\,;-1\,;3)$. Déterminer un point D situé sur l'axe Oy tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume de 5.

d) Calculer la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$, si $A(2\,;3\,;1)$, $B(4\,;1\,;-2)$, $C(6\,;3\,;7)$, $D(-5\,;-4\,;-8)$.

Bibliographie

[1] Cours et exercices de *Monsieur Alain Macchi* du gymnase de Morges.

[2] Cours et exercices de *Monsieur Sylvain Amaudruz* du gymnase du Bugnon.

[3] Cours et exercices de *Monsieur Hubert Bovet* du gymnase de Beaulieu.

[4] Commission romande de mathématiques.
FUNDAMENTUM de mathématique : GEOMETRIE VECTORIELLE ET ANALYTIQUE PLANE. Editions du Tricorne, 1991.

[5] Commission romande de mathématiques.
FUNDAMENTUM de mathématique : GEOMETRIE VECTORIELLE ET ANALYTIQUE DE L'ESPACE. Editions du Tricorne, 1996.

A

Quelques éléments de solutions

A.1 Vecteurs, composantes - points, coordonnées

Exercice 1.1:

a) Même direction, même sens, même longueur → représentent le même vecteur.

b) Même direction, sens opposé, même longueur → ne représentent pas le même vecteur.

c) Direction différente, sens non défini, même longueur → ne représentent pas le même vecteur.

d) Même direction, même sens, longueur différente → ne représentent pas le même vecteur.

Exercice 1.2:

a) Il y en a 15 différents :

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AA}$$

b) Il y en a 17 différents :

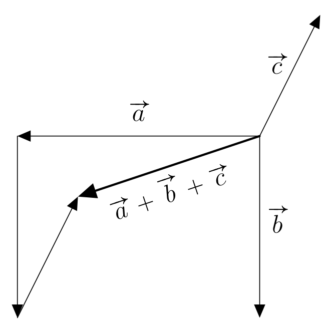
$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DD}$$

c) Il y en a 19.

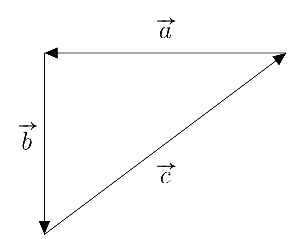
www.javmath.ch

Exercice 1.3:

a)



b) Par exemple :



www.javmath.ch

Exercice 1.4:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande)

www.javmath.ch

Exercice 1.5:

a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\vec{0}$

Exercice 1.6:

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AH}$ **c)** $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{HA}$

d) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{EA}$ **e)** $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{AC}$ **f)** $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{AE}$

www.javmath.ch

Exercice 1.7:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.8:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.9:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.10:

a) $\overrightarrow{c} = 6\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

b) $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{b}$

c) $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{8}\overrightarrow{c} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{b} = -\dfrac{1}{8}\overrightarrow{c} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{d}$

www.javmath.ch

Exercice 1.11:

$\overrightarrow{EP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{a} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{EN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{NM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$

$\overrightarrow{PN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{NP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$

www.javmath.ch

Exercice 1.12:

$\overrightarrow{PB} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{a} - \dfrac{1}{6}\overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{a} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{b}$

www.javmath.ch

Exercice 1.13:

Un corrigé pourra être vu ensemble (à votre demande) www.javmath.ch

Exercice 1.14:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$.

Exercice 1.15:

Par une chaîne d'égalités :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.16:

a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Même raisonnement pour $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

b) Comme $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme.

www.javmath.ch

Exercice 1.17:

Montrons, par exemple, que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \\ \bullet\ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.18:

Montrons que si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par une chaîne d'égalités : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC}$

www.javmath.ch

Exercice 1.19:

Manipulons l'équation de départ comme une équation afin d'obtenir $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} && \mid + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DO} \\ \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} && \mid \text{Chasle} \\ \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.20:

Il y en a 11 : $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Quelques justifications :

$$\begin{array}{llll} \overrightarrow{HG} = \mathbf{1}\cdot\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{GH} = -\mathbf{1}\cdot\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{HF} = \mathbf{2}\cdot\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{EH} = -\mathbf{3}\cdot\overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{AM} = \mathbf{3/2}\cdot\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{MB} = -\mathbf{1/2}\cdot\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}\cdot\overrightarrow{HG} & \end{array}$$

www.javmath.ch

Exercice 1.21:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) Oui, $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AE}$

b) Oui, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG}$

c) Non

d) Oui, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC}$

www.javmath.ch

Exercice 1.22:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) Oui, $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EK}$

b) Oui, $\overrightarrow{LG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{KB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

www.javmath.ch

Exercice 1.23:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

a) Non

b) Oui, $\overrightarrow{KF} = -3\overrightarrow{CH} - 2\overrightarrow{GD}$

www.javmath.ch

Exercice 1.24:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.25:

a) La représentation graphique sera vue ensemble.

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.26:

On a : $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$. Ainsi :

- $\vec{a} + \vec{b} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$

  $= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

- $k \cdot \vec{a} = k \cdot (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}) = k \cdot a_1\vec{e_1} + k \cdot a_2\vec{e_2} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$

- $\vec{a} = \vec{b} \iff a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$

  $\iff a_1 = b_1 \quad \text{et} \quad a_2 = b_2$

Exercice 1.27:

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c} = \begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \begin{pmatrix} -11/4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.28:

$k = 3$ et $m = 2$.

Exercice 1.29:

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet $\vec{e_1} = \mathbf{1} \cdot \vec{e_1} + \mathbf{0} \cdot \vec{e_2}$ et $\vec{e_2} = \mathbf{0} \cdot \vec{e_1} + \mathbf{1} \cdot \vec{e_2}$

b) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En effet, il s'agit de "résoudre" le système : $\begin{cases} \vec{a} = -3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} \\ \vec{b} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} \end{cases}$

Exercice 1.30:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.31:

a) $\vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{w} = 2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - 2\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{t} = \vec{a} + 3\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 1.32:

a) $\vec{v} = 4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}$. **b)** Impossible.

Exercice 1.33:

$\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{h}$; $\vec{b}, \vec{e}, \vec{i}$; $\vec{c}, \vec{e}, \vec{g}$; $\vec{e}, \vec{f}$.

Exercice 1.34:

a) $m = -14$ **b)** $m = -2$ ou $m = 6$

Exercice 1.35:

$\lambda = 35/29$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 105/29 \\ -30/29 \end{pmatrix}$

Exercice 1.36:

$\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{g}$; $\vec{b}, \vec{d}, \vec{f}$; $\vec{c}, \vec{d}$.

Exercice 1.37:

a) coplanaires, car non colin 2 à 2 et par exemple $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

b) coplanaires, car $\vec{b}$ colinéaire à $\vec{c}$

c) non coplanaires, car les *étapes 1* et *2* ne sont pas vérifiées

d) non coplanaires, car les *étapes 1* et *2* ne sont pas vérifiées

Exercice 1.38:

$k = 1/2$ ou $k = 3$.

Exercice 1.39:

a) La représentation graphique sera vue ensemble

b) $M(1\,;3)$ $N(-3\,;0)$ $P(0\,;-4)$ $Q(-1/2\,;5/2)$ $R(2\,;-1)$ $S(3/2\,;-3/2)$ $T(5/2\,;5/2)$ $U(3/2\,;-5/2)$ $V(-5/2\,;1/2)$

Exercice 1.40:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ **c)** $B(5\,;-3)$

d) $A(7\,;-6)$ **e)** $A(3\,;-2)$

Exercice 1.41:

$C(-27\,;-1)$; $D(-5\,;8/3)$; $L(-12\,;3/2)$; $R(3/7\,;25/7)$.

Exercice 1.42:

$L(1\,;3)$; $M(-3\,;0)$.

Exercice 1.43:

a) $D(-5\,;8)$ **b)** $D(13\,;16)$

Exercice 1.44:

Oui car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. En effet : $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AC}$ ou $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$

Exercice 1.45:

a) $k = 5$ **b)** $k = 1$ ou $k = 32/7$

Exercice 1.46:

$C(-9\,;0)$

Exercice 1.47:

a) $M(-13\,;-20)$ **b)** $F(-1;-2)$

Exercice 1.48:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{w} = \begin{pmatrix} -19 \\ -30 \\ 32 \end{pmatrix}$

Exercice 1.49:

$C(7\,;10\,;7)$, $D(3\,;3\,;2)$.

Exercice 1.50:

En effet, $\overrightarrow{AB}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

Exercice 1.51:

$k=-3$ ou $k=5$

Exercice 1.52:

Oui car $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (par exple.)

Exercice 1.53:

a) $M'(5\,;6\,;-4)$ **b)** $M''(-4\,;-10\,;16)$ **c)** $M'''(9\,;-25\,;19)$

Exercice 1.54:

$M_{AB}(-3/2\,;5/2)$; $M_{BC}(3/2\,;4)$; $M_{AC}(-1\,;7/2)$; $G(-1/3\,;10/3)$.

Exercice 1.55:

$A(4\,;6)$.

Exercice 1.56:

$C(5\,;7)$.

Exercice 1.57:

$C(0\,;2)$.

Exercice 1.58:

a) $C(-2\,;-2)$ **b)** $D(0\,;-6)$

Exercice 1.59:

$A(1\,;-3)$; $B(3\,;1)$; $C(-5\,;7)$

A.2 Norme et produit scalaire

Exercice 2.1:

a) $\|\vec{a}\| = 5 \qquad \|\vec{b}\| = \sqrt{73} \qquad \|\vec{c}\| = \sqrt{\dfrac{13}{2}}$ ou mieux $\|\vec{c}\| = \dfrac{\sqrt{26}}{2} \qquad \|\vec{d}\| = 3 \qquad \|\vec{e}\| = \sqrt{2}$

b) Il suffit donc de montrer que leur norme vaut 1.

Exercice 2.2:

a) $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| = 5 + 13 + 6 = 24 \qquad \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\| = \left\|\begin{pmatrix} 3+12-6 \\ 4-5+0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{82}$

$$\|-2\vec{a}\| + \|2\vec{a}\| = \left\|\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right\| = 20 \qquad \|\vec{a}\| \cdot \vec{c} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \left\|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\right\| = 1$$

b) $k = -5$ ou $k = 7$

c) $m = -23/10$ ou $m = 3/2$

Exercice 2.3:

périmètre $= 16 + \sqrt{182}$

Exercice 2.4:

On a bien $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ et l'aire vaut 48

Exercice 2.5:

On a bien $\|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$ (rayon du cercle)

Exercice 2.6:

On a bien $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$. Il s'agit du sommet B.

Exercice 2.7:

On a bien $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\| = 7$

(on rappelle qu'un losange est défini comme un quadrilatère admettant 4 côtés isométriques)

Exercice 2.8:

On a bien $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = 15\sqrt{2}$

Exercice 2.9:

$$\vec{a}_1 = \pm\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_{15} = \pm\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_7 = \pm\begin{pmatrix} 28/5 \\ -21/5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.10:

$P_1(11/5\,;7/5)$ et $P_2(29/5\,;-17/5)$

Exercice 2.11:

$P(1\,;-1)$

Exercice 2.12:

$k = -4$ ou $k = 2$

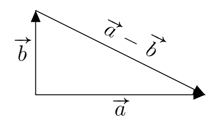
Exercice 2.13:

$P(0\,;17\,;0)$

Exercice 2.14:

a) non **b)** oui **c)** oui **d)** non **e)** oui **f)** non **g)** oui **h)** oui.

Exercice 2.15:



Par le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{a} \perp \vec{b} &\iff \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \\
&\iff a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \\
&\iff a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 \\
&\iff 0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 \\
&\iff a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0
\end{aligned}$$

Exercice 2.16:

$D(-6\,;1)$.

Exercice 2.17:

Aire $= 25/2$.

Exercice 2.18:

a) $m = 10/3$ **b)** $k = 4/7$ **c)** $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $k = 3$ **d)** $a = 4$ et $b = -5$.

Exercice 2.19:

a) $\lambda = 10$ **b)** $\lambda = -5$ **c)** $\lambda = -2$ ou $\lambda = 5/2$

La représentation graphique sera vue ensemble.

Exercice 2.20:

$P_1(-7\,;0\,;0)$ ou $P_2(-1\,;0\,;0)$.

Exercice 2.21:

a) 102 **b)** 102 **c)** non défini **d)** -1 **e)** -1 **f)** $\begin{pmatrix} 55 \\ -11 \end{pmatrix}$

Exercice 2.22:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = b_1a_1 + b_2a_2 = \vec{b} \bullet \vec{a}$

- $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2$

  $= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

- $(k\vec{a}) \bullet \vec{b} = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 = ka_1b_1 + ka_2b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(\vec{a} \bullet \vec{b})$

  et $\vec{a} \bullet (k\vec{b}) = a_1(kb_1) + a_2(kb_2) = ka_1b_1 + ka_2b_2 = k(a_1b_1 + a_2b_2) = k(\vec{a} \bullet \vec{b})$

- $\vec{a} \bullet \vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$

Exercice 2.23:

a) $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = -\vec{u} + \vec{v}$

b) Il s'agit de constituer une chaîne d'égalités : $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \cdots = \cdots = 0$

Exercice 2.24:

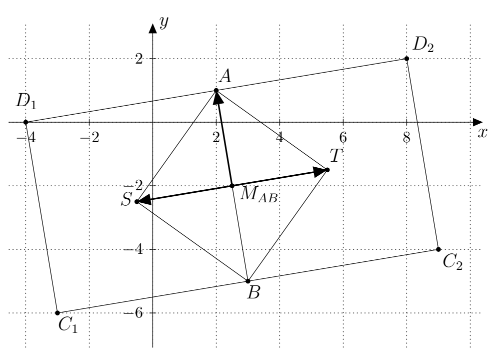
a) $\vec{v} = \pm\vec{u}_\perp = \pm\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v} = \pm\dfrac{1}{2}\vec{t}_\perp = \pm\begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{v} = \pm 10/13\,\vec{w}_\perp = \pm\begin{pmatrix} -120/13 \\ 50/13 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.25:

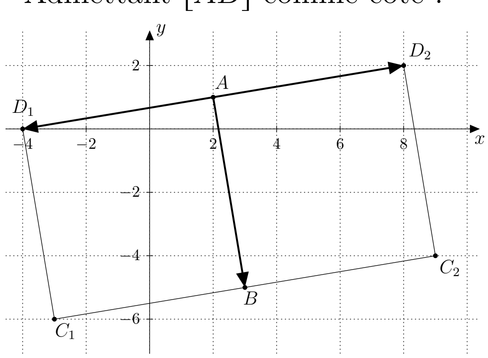
a) $M(4\,;6)$ **b)** $B(10\,;0)$; $D(-2\,;12)$.

Exercice 2.26:

a) Figure à l'échelle :

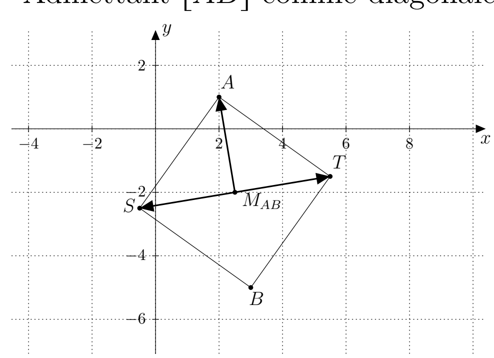


b) • Admettant $[AB]$ comme côté :



2 possibilités :
$C_1(-3\,;-6)$, $D_1(-4\,;0)$ ou $C_2(9\,;-4)$, $D_2(8\,;2)$

• Admettant $[AB]$ comme diagonale :



1 possibilité :
$S(-1/2\,;-5/2)$, $T(11/2\,;-3/2)$

Exercice 2.27:

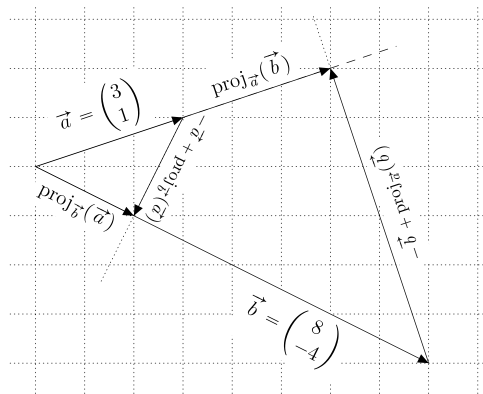
2 possibilités : $C_1(12\,;3)$, $D_1(9\,;-1)$ ou $C_2(-4\,;15)$, $D_2(-7\,;11)$.

Exercice 2.28:

$A(61/2\,;12)$.

Exercice 2.29:

- $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$



Exercice 2.30:

- D'une part, $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ étant colinéaire à $\vec{b}$, on a :

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = k \cdot \vec{b}. \tag{1}$$

- D'autre part, $-\vec{a} + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$ étant perpendiculaire à $\vec{b}$, on a :

$$(-\vec{a} + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})) \bullet \vec{b} = 0 \iff$$

$$-\vec{a} \bullet \vec{b} + \text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) \bullet \vec{b} = 0 \tag{2}$$

En substituant (1) dans (2), on obtient :

$$-\vec{a} \bullet \vec{b} + k\vec{b} \bullet \vec{b} = 0 \iff -\vec{a} \bullet \vec{b} + k \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2 = 0$$

$$\iff k = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2} \tag{3}$$

En substituant (3) dans (1), on obtient bien la première formule :

$$\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}\vec{b}$$

La deuxième formule :

$$\left\|\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})\right\| = \left\|\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|^2}\vec{b}\right\| = \frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\left\|\vec{b}\right\|^2} \cdot \left\|\vec{b}\right\| = \frac{|\ \vec{a} \bullet \vec{b}\ |}{\left\|\vec{b}\right\|}$$

Exercice 2.31:

a) $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 9/25 \\ -12/25 \end{pmatrix}$, $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 36/17 \\ 36/17 \\ 54/17 \end{pmatrix}$, $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 18/65 \\ 144/65 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 16/13 \\ 0 \\ -24/13 \end{pmatrix}$, $\text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 16/9 \\ -16/9 \end{pmatrix}$

Exercice 2.32:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 20/7 \\ -5/7 \\ 10/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ -2/7 \\ 11/7 \end{pmatrix}$

Exercice 2.33:

a) $h_C = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ **b)** Aire $= \dfrac{27\sqrt{2}}{2}$

Exercice 2.34:

a) obtus **b)** aigu

Exercice 2.35:

a) $P(9\,;8)$ **b)** $(18\,;-4)$ **c)** il s'agit de l'angle $\angle ABC$

Exercice 2.36:

$\alpha = 41{,}05°$; $\beta = 100{,}49°$; $\gamma = 38{,}45°$.

Exercice 2.37:

avec Ox : 65,91° ; avec Oy : 65,91° ; avec Oz : 35,26°.

Exercice 2.38:

a) angle = 60° **b)** angle = 70,53° **c)** angle = 120°

Exercice 2.39:

a) $\angle BAD = 135°$ et $\angle BCD = 45°$.

b) Comme la somme des angles opposé de ce quadrilatère vaut 180°, le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle.

Exercice 2.40:

$$\mathcal{A} = \left\| \vec{b} \right\| \cdot \left\| \operatorname{proj}_{\vec{b}_\perp}(\vec{a}) \right\| = \left\| \vec{b} \right\| \cdot \frac{\mid \vec{a} \bullet \vec{b}_\perp \mid}{\left\| \vec{b}_\perp \right\|}$$

$$= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \cdot \frac{\left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{b_2^2 + b_1^2}} = \mid a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \mid$$

Exercice 2.41:

a) $D(4\,;7)$

b) Aire $= 14$

Exercice 2.42:

Aire $= 18$.

Exercice 2.43:

Aire $= 79/2$.

Exercice 2.44:

$C_1(5\,;2)$ ou $C_2(2\,;2)$.

Exercice 2.45:

a) Aire $= 15$.

b) Longueur de hauteurs : $h_A = \dfrac{3}{2}\sqrt{10}$, $h_B = 2\sqrt{5}$ et $h_C = 6$.

A.3 Produit vectoriel

Exercice 3.1:

Il s'agit de résoudre ce système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases}$$

En posant $c_3 = t$ puis en le résolvant par rapport aux deux inconnues c_1 et c_2, vous obtiendrez :

$$\begin{cases} c_1 = -31/7\ t \\ c_2 = 9/7\ t \\ c_3 = t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} -31 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ par exple. avec } t = 7$$

Exercice 3.2:

a) $\bullet\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\bullet\ \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\bullet\ \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\bullet\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\bullet\ (2\vec{a}) \times \left(-3\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 72 \\ 24 \\ -48 \end{pmatrix}$ $\bullet\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ -16 \end{pmatrix}$

$\bullet\ \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -36 \\ 52 \\ -28 \end{pmatrix}$ $\bullet\ \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 40 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) non, on constate ci-dessus que $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Exercice 3.3:

$$\bullet\ \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_3b_2 - a_2b_3 \\ -a_3b_1 + a_1b_3 \\ a_2b_1 - a_1b_2 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\bullet\ (k\vec{a}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix} ka_2b_3 - ka_3b_2 \\ -ka_1b_3 + ka_3b_1 \\ ka_1b_2 - ka_2b_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\bullet\ \vec{a} \times (k\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_2kb_3 - a_3kb_2 \\ -a_1kb_3 + a_3kb_1 \\ a_1kb_2 - a_2kb_1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\bullet\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2) \\ -a_1(b_3 + c_3) + a_3(b_1 + c_1) \\ a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2c_3 - a_3c_2 \\ -a_1c_3 + a_3c_1 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

- $$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \begin{pmatrix}(a_2+b_2)c_3-(a_3+b_3)+c_2\\ -(a_1+b_1)c_3+(a_3+b_3)c_1\\ (a_1+b_1)c_2-(a_2+b_2)c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2c_3-a_3c_2\\ -a_1c_3+a_3c_1\\ a_1c_2-a_2c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\ -b_1c_3+b_3c_1\\ b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}$$
  $$= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$
- $$\vec{a}\times\vec{a} = \begin{pmatrix}a_2a_3-a_3a_2\\ -a_1a_3+a_3a_1\\ a_1a_2-a_2a_1\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Exercice 3.4:
On obtient $\vec{0}$

Exercice 3.5:
On peut proposer $\vec{v}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$, puis plus généralement : $\vec{v}=k\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ (avec $k\in\mathbb{R}$)

Exercice 3.6:
La représentation graphique sera vu ensemble.

Exercice 3.7:
La représentation graphique sera vu ensemble.

Exercice 3.8:
$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2 = 6 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-(\vec{a}\bullet\vec{b})^2 = 21\cdot 35-27^2 = 6$$

Exercice 3.9:
- D'une part :
  $$\begin{aligned}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(-a_1b_3+a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\ &= a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2-2a_2b_3a_3b_2+a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2-2a_1b_3a_3b_1+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_2a_2b_1\end{aligned}$$
- D'autre part :
  $$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2\cdot\left\|\vec{b}\right\|^2-(\vec{a}\bullet\vec{b})^2 &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^3+a_3^2b_3^2\\ &\quad-(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+2a_2b_2a_3b_3)\\ &= a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^3+a_3^2b_3^2-a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2-a_3^2b_3^2\\ &\quad-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3\\ &= a_1^2b_2^2+a_1b_3^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_3^2+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3\end{aligned}$$

  d'où l'égalité… Ouf ! ;-)

Exercice 3.10:

Angle = 7,33°

Exercice 3.11:

Angle = 45°

Exercice 3.12:

Aire = 12

Exercice 3.13:

a) Aire = 11 **b)** $h_A = \dfrac{22}{\sqrt{61}}$ ou mieux $h_A = \dfrac{22\sqrt{61}}{61}$.

Exercice 3.14:

$$\frac{\left\|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|} = \frac{\left\|\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}$$
$$= \frac{\left\|\vec{0}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|} = \frac{2\cdot\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|} = 2$$

Exercice 3.15:

Les représentations graphiques seront vues ensemble.

Exercice 3.16:

Par une chaîne d'égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ -a_1b_3+a_3b_1 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(-a_1b_3+a_3b_1)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3 \\ &= a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2+a_1b_2c_3-a_2b_1c_3 \\ &= \det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})\end{aligned}$$

Exercice 3.17:

a) Oui **b)** $k = 1/2$ ou $k = 3$.

Exercice 3.18:

a) Non **b)** $D(0\,;0\,;19/9)$.

Exercice 3.19:

$$\mathcal{V} = \text{ aire base } \cdot \text{ hauteur } = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \cdot \left\|\vec{c'}\right\| = \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| \cdot \frac{|\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})|}{\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|}$$

$$= |\vec{c} \bullet (\vec{a} \times \vec{b})| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}| = \left|\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})\right|$$

Exercice 3.20:

Même démarche en utilisant que le volume d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) vaut

$$\mathcal{V}_{tétra} = \frac{1}{3}(\text{surface du } \Delta \text{ de base}) \cdot (\text{hauteur})$$

Exercice 3.21:

a) $V = 18$ **b)** $V = 3$ **c)** $D(0\,;8\,;0)$ ou $D(0\,;-7\,;0)$ **d)** $h_D = \dfrac{45}{7}$

Index

A

abscisse ... 27, 32

aire

- parallélogramme ... 55, 62
- triangle ... 55, 62

angle vecteurs ... 52, 61

associativité ... 6

B

base

- associée ... 27, 32
- de V_2 ... 17
- de V_3 ... 20

C

centre de gravité ... 35

coefficients ... 9

colinéaires

- critère I ... 22
- critère II ... 23
- définition ... 13

combinaison linéaire ... 9

commutativité ... 6

composantes ... 17, 20

coordonnées ... 27, 32

coplanaires

- critère ... 14
- définition ... 14

coplanarité

- test ... 25
- test I ... 63
- test II ... 64

cote ... 32

D

déterminant ... 23

différence de vecteurs ... 4

direction d'un vecteur ... 1

distance ... 39

M

milieu segment ... 34

N

norme

- calcul ... 38
- définition ... 37

O

ordonnée ... 27, 32

P

perpendiculatité ... 43

point milieu ... 34

produit

- scalaire ... 42
- vectoriel ... 57

projection orthogonale ... 50

R

règle

- main droite ... 59
- tire-bouchon ... 59

repère ... 27, 32

- cartésien ... 37

représentant 2

S

sens vecteur 1
somme vecteurs 4

T

théorème du T 47

V

vecteur
- définition 1
- opposé 4
- unitaire 37, 40

vecteurs
- orthogonaux 42
- perpendiculaires 42

volume
- parallélépipède 65
- tétraèdre 65

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`http://www.javmath.ch`