

Thème 14: Analyse combinatoire

Introduction : L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de ranger des objets et permet de répondre à des questions telles que: "Combien de nombres de quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?" ou bien "Dans une classe de 24 élèves, on doit élire deux délégués de classe. Combien existe-t-il de paires différentes possibles ?"

La connaissance de ces méthodes de dénombrement est indispensable au calcul élémentaire des probabilités.

14.1 Principe général

Exemple d'introduction: Supposons que trois équipes participent à un tournoi dans lequel sont déterminées une 1^{ère}, une 2^{ème} et une 3^{ème} place.

Combien de classements différents peut-on obtenir à la fin de la compétition ?

1^{ère} méthode: Pour faciliter l'identification des équipes, nous allons les désigner par les lettres A, B, C.

En **énumérant** les différents classements possibles, on en obtient 6. En effet :

Mais qu'en serait-il dans le cas d'une compétition de 10 équipes ? Comment s'assurer avec la méthode précédente de ne pas oublier quelques configurations ?

2^{ème} méthode: On modélise la situation sous la forme de gobelets, dans lesquels, on compte le nombre de possibilités de les remplir :

La méthode des gobelets

• Soit par rapport au classement



1^{ère} place



2^{ème} place



3^{ème} place

• Soit par rapport à l'équipe



équipe A



équipe B



équipe C



Dans cet exemple, on constate que l'on peut dénombrer soit par rapport au classement, soit par rapport à l'équipe. Ce ne sera pas toujours le cas. Il s'agira alors de choisir le bon titre des gobelets.

La méthode ci-dessus illustre la règle générale suivante, que nous utiliserons comme principe fondamental:

Le principe de multiplication :
(opérations indépendantes)

Si une première opération peut être effectuée de n_1 manières différentes, puis une seconde opération peut être effectuée de n_2 manières différentes, puis une troisième opération peut être effectuée de n_3 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à une k -ième opération qui peut être effectuée de n_k manières différentes. Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuée de $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ manières différentes.

Modèle 1 : Une classe se compose de 12 filles et 9 garçons. De combien de façons peuvent être choisis un président de classe, un vice-président, un trésorier et un secrétaire, si le trésorier doit être une fille, le secrétaire un garçon, et si un étudiant ne peut exercer plus d'une charge ?



*De façon générale, il est recommandé de dénombrer les opérations en commençant par celles où sont imposées **les contraintes les plus sévères**, et ceci, par ordre décroissant de sévérité.*

Modèle 2 : Combien peut-on former de nombres de quatre chiffres différents, si ces nombres doivent être des multiples de 5.



Après avoir complété les gobelets à forte contrainte, on peut être amené à séparer le dénombrement en 2 ou plusieurs cas.

Exercice 14.1: Une fille a quatre jupes et six chemisiers. Combien de combinaisons différentes «jupe et chemisier» peut-elle porter ?

Exercice 14.2: Déterminer le nombre d'entiers positifs à 4 chiffres qui peuvent être écrits avec 3, 5, 7 et 9
 a) si les répétitions sont permises ?
 b) si elles ne sont pas permises ?

Exercice 14.3: Combien de nombres différents de 5 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9
 a) si les nombres doivent être impairs ?
 b) si les 2 premiers chiffres de chaque nombre doivent être pairs ?

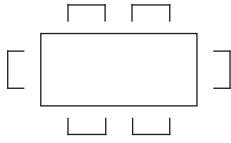
Exercice 14.4: Le Sport-Toto était un jeu de pronostics sur 11 matches de football.
 Il y avait 3 résultats possibles: gagné, perdu ou nul (1 ; 2 ; x).
 Combien de pronostics différents pouvait-on faire ?

Exercice 14.5: On veut asseoir 5 hommes et 4 femmes dans une rangée de 9 chaises de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 14.6: Dans certains pays, les plaques d'immatriculation des automobiles commencent par une lettre de l'alphabet, suivi de cinq chiffres. Calculer combien de plaques d'immatriculation sont réalisables si
 a) le premier chiffre suivant la lettre ne peut pas être 0 ;
 b) la première lettre ne peut pas être O ou I et le premier chiffre ne peut pas être 0 ou 1.

Exercice 14.7: De combien de façons le photographe d'un mariage peut-il organiser une seule rangée de 6 personnes choisies parmi un groupe de 10 personnes, en considérant que les mariés font partie de ce groupe de 10 personnes et que:
 a) la mariée doit être sur la photographie, mais pas le marié ?
 b) la mariée et le marié doivent tous les deux être sur la photographie ?
 c) la mariée et le marié doivent être côte à côte sur la photographie ?

Exercice 14.8: Pour entrer dans une entreprise, chaque employé ou cadre a un code constitué de quatre chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6.
 a) Combien de codes différents peut-on obtenir ?
 b) Parmi ceux-ci, combien sont constitués
 1) De quatre chiffres tous différents ?
 2) De quatre chiffres différents contenant un seul 6 ?



Exercice 14.9: Lors d'un repas, on place 6 personnes autour d'une table rectangulaire.

Pour simplifier la rédaction de l'exercice, on appellera ces 6 personnes: A, B, C, D, E et F .

De combien de manières peut-on les placer, si l'on veut que les personnes A et B soient l'une en face de l'autre ?

Exercice 14.10: Une valise dispose de deux serrures à chiffres. Chaque serrure renferme un code à trois chiffres obtenus en tournant trois cylindres numérotés de 0 à 9.

Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

14.2 Les permutations

Ex. d'introduction 1: Combien d'anagrammes du mot ART peut-on former ?

Ex. d'introduction 2: Même question avec le mot ARA.

Définition: On a n objets. On appelle **permutation** une disposition **ordonnée** de tous ces objets.

Remarques:

- Selon le modèle gobelet, il y a autant de gobelets que d'objets à y introduire. Dans chaque gobelet, il y aura finalement qu'un seul objet.
- L'ordre est important.
- La famille d'objets à placer dans les gobelets peut contenir plusieurs copies identiques d'un ou plusieurs objets. Dans ce cas, rien ne distingue les permutations de ces objets entre eux et on parle alors de permutation de n objets avec répétitions.

Notation:

- P_n : nombre de permutations de n objets distincts.
- $\overline{P}_n(r_1; \dots; r_k)$: nombre de permutations de n objets avec répétitions où r_1, \dots, r_k désignent le nombre le nombre d'objets identiques.

Exemples:

- 1) Le nombre de permutations des lettres du mot GYMNASE est P_7 .
- 2) Le nombre de permutations des lettres du mot PROFESSIONS est $\overline{P}_{11}(3; 2)$ ou $\overline{P}_{11}(2; 3)$.

Formule:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Justification:

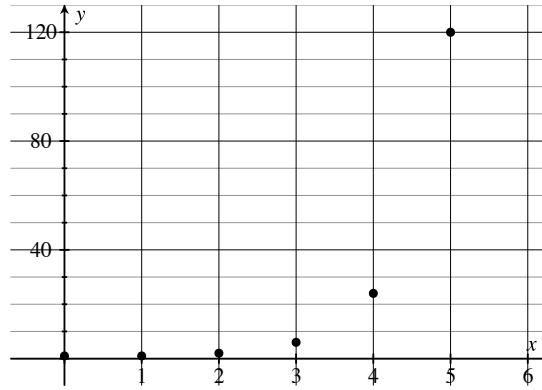
Définition: On appelle " **n factorielle**" ($n \in \mathbb{N}^*$) et l'on note $n!$ le produit défini par

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

De plus, on pose par convention $0! = 1$.

Exemples : $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
 $10! = 3'628'800$

Remarques : 1) La fonction factorielle a une croissance spectaculaire :



2) Vous trouverez sur votre calculatrice la touche $\boxed{x!}$ ou $\boxed{n!}$

Formules :

$$\boxed{P_n = n!}$$

$$\boxed{\bar{P}_n(r_1; \dots; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}}$$

Justification :

Modèle 3: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot DIPLÔMES et du mot MATURITÉ.

Modèle 4: Un étudiant possède, parmi ses livres, 5 livres de math, 3 livres d'histoire et 8 livres en allemand. De combien de manières peuvent-ils être rangés sur une étagère si les livres traitant de la même matière sont placés les uns à côté des autres.



Il faut décomposer chronologiquement les différentes étapes de rangement, les dénombrer afin de multiplier ensuite les réponses individuelles obtenues.

Exercice 14.11: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MORGES ?

Exercice 14.12: Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MISSISSIPPI ? Parmi ces anagrammes, combien commencent et se terminent par la lettre S ?

Exercice 14.13: Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les 1^{ère}, 2^{ème} et 7^{ème} positions ?

Exercice 14.14: Les quatre remplaçants d'une équipe de volley prennent place sur le banc des remplaçants. De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir ?

Exercice 14.15: Le client d'une banque se rappelle que 2, 4, 7 et 9 sont les chiffres d'un code d'accès à quatre chiffres pour le distributeur automatique de billets. Malheureusement, il a oublié le code. Calculer le plus grand nombre possible d'essais nécessaires pour obtenir le code secret.

Exercice 14.16: Refaire l'exercice précédent avec les chiffres 2, 4 et 7, en sachant que l'un de ces chiffres se trouve deux fois dans le code d'accès à quatre chiffres.

Exercice 14.17: On dispose des sept jetons suivants:

① ① ② ② ② ③ ③

- a) Combien de nombres de sept chiffres peut-on composer en juxtaposant ces sept jetons ?
 b) Combien de nombres sont inférieurs à 1'300'000 ?

14.3 Les arrangements

Ex. d'introduction 1 : Combien de nombres de deux chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 ?

Ex. d'introduction 2 : Combien de nombres de quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1 et 2 ?

-
- Remarques :**
- L'ordre d'écriture est très important: par exemple dans le 1^{er} exemple, les nombres 56 et 65 sont différents.
 - Dans le modèle gobelets, il y a plus d'éléments à placer que de gobelets à disposition.

Définition : On a n objets.
On appelle arrangement sans répétition une disposition ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les n . ($1 \leq p \leq n$)

On note A_p^n le nombre d'arrangements possibles.

On appelle arrangement avec répétition une disposition ordonnée de p éléments non forcément distincts choisis parmi les n .

On note \bar{A}_p^n le nombre d'arrangements possibles.

Formule :

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad 1 \leq p \leq n$$

Justification :

Remarques : Cette formule est compatible avec celle des **permutations** dans le cas d'un **arrangement de n éléments choisis parmi les n** :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = P_n$$

Formule :

$\bar{A}_p^n = n^p \quad 1 \leq p$

Justification :

Modèle 5 : Déterminer le nombre de mots de quatre lettres distinctes formés avec les lettres du mot **DIPLÔME** ?

Modèle 6 : Dans l'alphabet braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points disposés en un tableau de 3 lignes et 2 colonnes, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on composer ?

= gymnase de Morges

Exercice 14.18: De combien de manières 10 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 4 places ?

Exercice 14.19:

- Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots de 5 lettres peut-on former ? (*Les mots n'ont pas nécessairement de signification !*)
- Même question, mais en se limitant aux mots formés de 5 lettres différentes.

Exercice 14.20:

- Huit personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de cinq places. Combien y a-t-il de possibilités ?
- Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de huit places. Combien y a-t-il de possibilités ?
- Comment expliquez-vous l'analogie entre ces deux situations ?

Exercice 14.21:

- Combien y a-t-il d'initiales possibles formées de deux lettres ?
- Combien un village doit-il avoir d'habitants pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 14.22: On considère les nombres 2, 5 et 7.

- Combien peut-on former de nombres de deux chiffres distincts ?
- Parmi eux, combien y a-t-il de nombres pairs ?

Exercice 14.23: On considère un jeu forain où 4 souris, numérotées de 1 à 4 peuvent se diriger vers 5 cases A, B, C, D et E. Plusieurs souris pouvant choisir la même case. Sur un billet, le joueur inscrit une répartition des souris et il gagne si son pronostic se réalise. Combien de pronostics différents peut-il faire ?

Exercice 14.24: Dix chevaux sont au départ d'un grand prix à l'hippodrome de Vincennes. Combien y a-t-il de quartés possibles ?



<http://www.javmath.ch>



14.4 Les combinaisons

Ex. d'introduction 1: Quatre personnes désirent jouer au tennis de table en double. Combien d'équipes différentes peuvent-elles former ?

-
- Remarques:**
- Une combinaison est caractérisée uniquement par le choix des objets.
 - Une combinaison n'est pas caractérisée par l'ordre des objets. L'équipe $\{1 ; 2\}$ ne diffère pas de l'équipe $\{2 ; 1\}$.
 - On ne peut pas utiliser le modèle gobelet, car celui-ci induit un choix ordonné ; ce qui n'est pas le cas lors de combinaisons.

Définition: On appelle combinaison une disposition non ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les n . ($1 \leq p \leq n$)

On note C_p^n le nombre de combinaison possible.

Formule:

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{P_p} \quad 1 \leq p \leq n$$

Justification :

Formule :

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad 1 \leq p \leq n$$

-
- Remarques :**
- Par convention de calcul, on a $C_0^n = 1$ et $C_0^0 = 1$.
 - La notion de combinaison avec répétitions existe, mais nous ne l'étudierons pas dans le cadre de ce cours.

Modèle 7 : De combien de manières différentes peut-on former un comité de trois personnes à partir d'une classe de 24 élèves ?

-
- Modèle 8 :**
- Combien de mains différentes de six cartes peut-on obtenir à partir d'un jeu de 36 cartes ?
 - Parmi celles-ci, combien contiennent les 4 valets ?
 - Combien contiennent au moins 1 valet ?



Dans le cas de « au moins un », on dénombre la situation « aucun » que l'on déduit du dénombrement « total ».

Exercice 14.25: 12 personnes se rencontrent et se serrent la main. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Exercice 14.26: Vous devez organiser un tournoi de tennis dans le cadre de votre club. Il y a 9 personnes inscrites qui devront toutes jouer une fois contre leur adversaire. Combien de matchs vont devoir se dérouler ?

Exercice 14.27 : Un marchand de glaces a en stock 31 parfums différents. Il se vante de proposer environ 4500 glaces différentes à trois boules, chaque boule étant d'un parfum différent. Comment ce nombre a-t-il été obtenu ?

Exercice 14.28: Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres comprenant 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

Exercice 14.29: De combien de façons peut-on choisir une main de 5 cartes dans un jeu de 36 cartes, si l'on veut que ces 5 cartes contiennent :

- les 4 as ?
- 2 as et 2 roi ?
- au moins un as ?

Exercice 14.30: Un atelier comprend 15 ouvriers, 8 femmes et 7 hommes. On choisit dans cet atelier des groupes de 5 ouvriers.

- Combien de groupes différents peut-on former ?
- Combien de groupes comportant 3 hommes peut-on former ?

Exercice 14.31: a) De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (choisir 6 numéros parmi 45) ?



b) Parmi toutes les possibilités, combien permettent de réaliser :

Aucun gain :	0 bon numéro,
	1 bon numéro,
	2 bons numéros,
Un gain de 6.- :	3 bons numéros,
Un gain de 50.- :	4 bons numéros,
Un gain de 3500.- :	5 bons numéros,
Le Jackpot :	6 bons numéros ?

c) Combien permettent d'obtenir au moins un gain ?



<http://www.javmath.ch>



14.5 Permutation - Arrangement - Combinaison lequel choisir ?

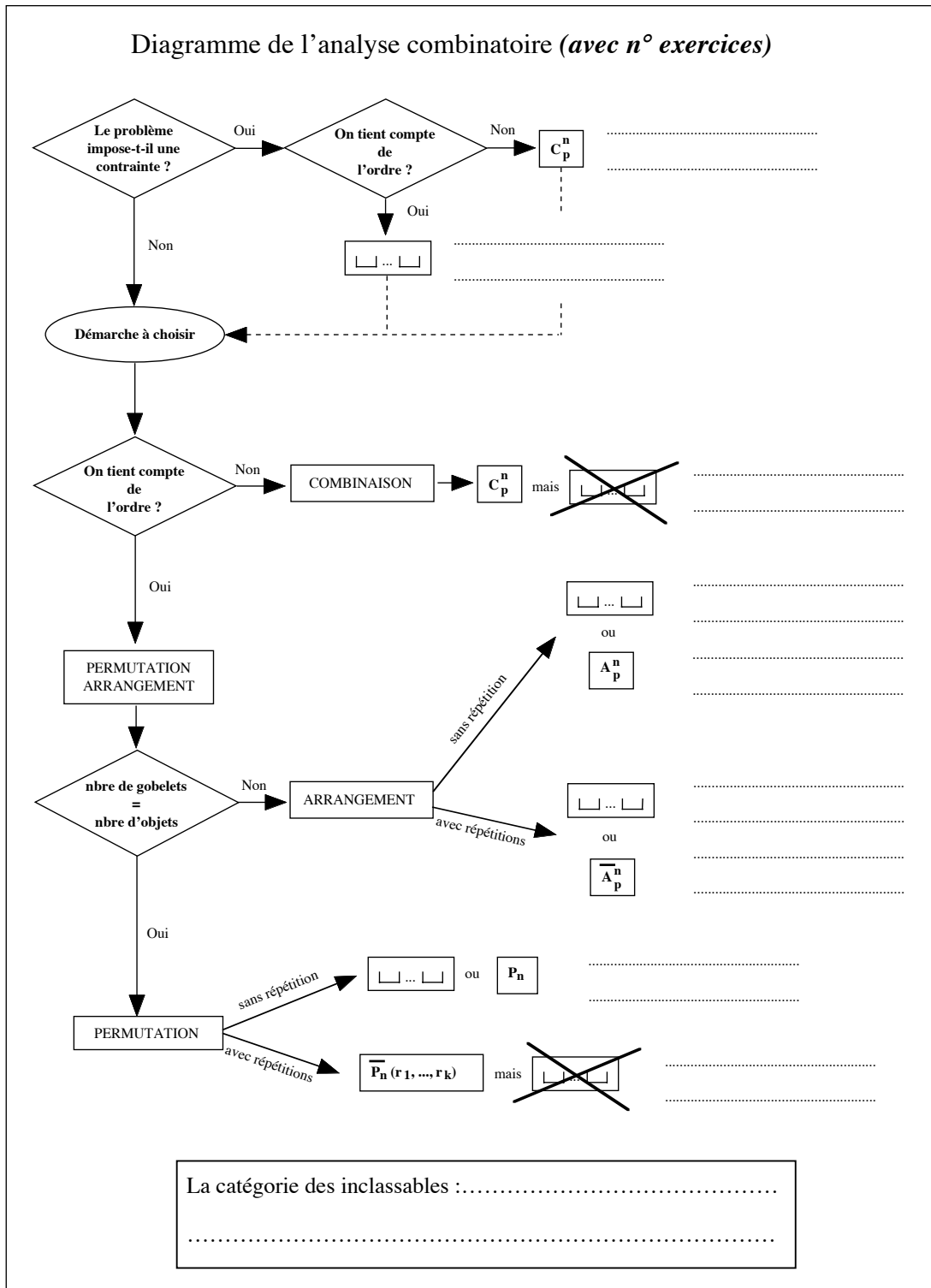
Exemple: Une urne contient les 6 jetons suivants :

$$\{ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{6} \}$$

- a) On tire simultanément 5 jetons. Combien de tirages différents contenant 2 chiffres pairs et 3 impairs peut-on avoir ?
- b) On tire successivement les 6 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents formés des 6 chiffres peut-on ainsi avoir ?
- c) On tire successivement 4 jetons et on les aligne. Combien de nombres différents peut-on avoir ?
- d) On tire simultanément 4 jetons. Combien de tirages différents peut-on avoir ?
- e) On répète 4 fois l'opération suivante :
On tire 1 jeton, on note le chiffre obtenu puis on le remet dans l'urne.
 Combien de nombres différents peut-on avoir ?

?	Comment savoir dès le départ la bonne formule à utiliser P_n ; $\bar{P}_n(r)$; A_p^n ; \bar{A}_p^n ; C_p^n ; "gobelets"	?
---	--	---

On peut utiliser alors le diagramme suivant :



Il est important de bien décoder le problème pour repérer si l'ordre a de l'importance dans le dénombrement. En particulier, si les mots suivants apparaissent:

SUCCESSIVEMENT ⇒

SIMULTANÉMENT ⇒

- Exercice 14.32:** Dans une course, 12 chevaux prennent le départ.
- De combien de manières peut se présenter le tableau d'arrivée des trois premiers ? (tiercé dans l'ordre)
 - Combien de trios de gagnant peut-on avoir ? (tiercé dans le désordre)

- Exercice 14.33:**
- Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire 3 simultanément. Déterminer le nombre de tirages différents.
 - Même question si l'on tire successivement ces trois boules.
 - Même question si après chaque tirage on remet la boule dans l'urne.

- Exercice 14.34:** Combien de nombres de 3 chiffres, non forcément distincts, peut-on former avec les 6 chiffres 2, 3, 5, 6, 7 et 9 ? Parmi ceux-ci, combien sont inférieurs à 400 ? pairs ? multiple de 5 ?

- Exercice 14.35:**
- Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'un examen écrit. Combien de choix peut-il faire ?
 - Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre les 3 premiers problèmes ?
 - Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre 4 des 5 premiers problèmes ?

Exercice 14.36:



- Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ? (Ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9).
- Parmi les configurations ci-dessus, combien y en a-t-il où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

- Exercice 14.37:** De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes (A, ..., H) en rang si:

- aucune restriction n'est mise;
- les personnes A et B veulent être l'une à côté de l'autre;
- les hommes ne doivent avoir que des voisins et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes.

- Exercice 14.38:** Parmi les 10 participants à un tournoi d'échecs, on compte 4 Russes, 3 Américains, 2 Anglais et un Brésilien. Dans le classement du tournoi, on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs, mais pas leur identité. Combien de classements peut-on envisager ?

Exercice 14.39: Combien peut-on former de nombres de 8 chiffres avec deux 4, quatre 2 et deux 3 ?

Exercice 14.40: On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes.

- Combien y a-t-il de mains possibles ?
- Combien y a-t-il de mains formées d'un roi et deux as ?
- Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun as ?
- Combien y a-t-il de mains contenant au moins un as ?
- Combien y a-t-il de mains contenant exactement un as ?

Exercice 14.41: Combien de salades différentes peut-on préparer à partir d'un choix de laitue, scarole, endive, cresson et chicorée amère ?
(Considérez d'abord le nombre possible constitué d'un légume, puis de deux ...)

Exercice 14.42: Un avion comporte huit places numérotées. Il doit transporter seize personnes en deux voyages.

- Combien y a-t-il de possibilités d'attribuer les huit sièges numérotés du premier vol ?
- Avant les deux embarquements, on distribue au passager un ticket formé de deux chiffres. Le premier chiffre correspond au numéro du vol et le deuxième chiffre au numéro du siège (par exemple, le ticket 27 correspond à la place numéro 7 du deuxième vol).
Combien y a-t-il de possibilités de distribuer ces tickets aux passagers ?
- Combien de groupes différents de personnes peut-on former pour le premier voyage ?

Exercice 14.43:

- Une jeune fille se fait consciencieusement les ongles un par un. Combien a-t-elle de manières différentes d'opérer en traitant tous les ongles d'une même main avant de passer à l'autre ?
- La semaine suivante, elle désire à nouveau se faire les ongles, mais en y ajoutant un petit peu d'originalité:
D'abord sur sa main gauche, elle utilise le vernis rouge sur trois doigts et le vernis noir sur les deux autres. Puis sur sa main droite, elle utilise le vernis rouge sur deux doigts et le vernis noir sur les trois autres.
Combien a-t-elle alors de possibilités différentes de se vernir les ongles des deux mains ?
(il s'agit donc bien de dénombrer le nombre de configurations différentes)



<http://www.javmath.ch>



