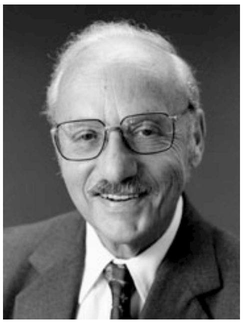
Thème 7: Introduction à la programmation linéaire

Introduction:



George Dantzig

Au cours de la Seconde Guerre mondiale, l'armée de l'air des États-Unis d'Amérique eut de nombreux problèmes concernant l'allocation de ses ressources, tant humaines que matérielles. Naturellement, plusieurs spécialistes se penchèrent sur la question et parmi eux, George Dantzig. Peu après la guerre, en 1946, ce dernier formula de manière plus générale ce genre de problèmes et proposa une méthode de résolution, ***la méthode du simplexe****.*

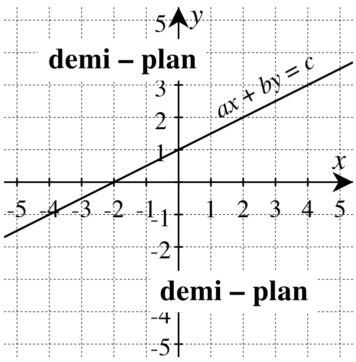
Ce problème général peut se formuler ainsi : trouver la valeur maximale (ou minimale) d'une fonction à plusieurs variables si ces variables sont soumises à des contraintes. Par exemple, supposons qu'une compagnie fabrique plusieurs produits différents et que pour chacun de ces produits il y a des coûts de fabrication différents en main-d'oeuvre et en matières premières. La compagnie connaît le bénéfice qu'elle réalise en vendant chacun de ces produits. La compagnie doit alors se poser la question suivante : quelle quantité de chacun des produits doit-on fabriquer pour obtenir un bénéfice global maximal ? En général, de tels problèmes peuvent être assez complexes. Cependant, dans le cas où la fonction à optimiser, c'est-à-dire à rendre minimum ou maximum, est linéaire et où les contraintes peuvent s'exprimer par des inéquations, on peut développer une théorie assez simple pour résoudre ce genre de problèmes, la **programmation linéaire**. Nous nous limiterons à des problèmes comportant seulement **deux** variables. Ceci nous permettra d'illustrer la solution par une représentation graphique simple. Précisons que la méthode de résolution proposée dans ce paragraphe n'est pas la méthode du simplexe.

7.1 Inéquations linéaires

Définition: Une **inéquation linéaire** est une inéquation qui peut être écrite sous l'une des formes suivantes, où a, b et c sont des nombres réels :

$$ax + by < c \quad , \quad ax + by > c \quad , \quad ax + by \le c \quad , \quad ax + by \ge c$$

Graphiquement: La droite $ax + by = c$ sépare le plan en deux **demi-plans**, comme le montre la figure ci-contre.

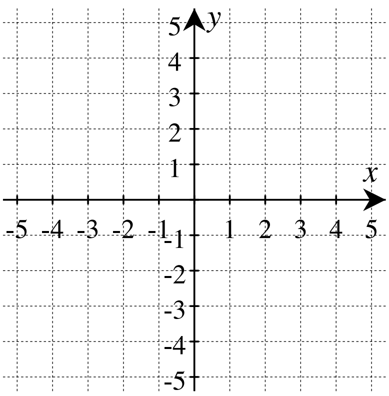


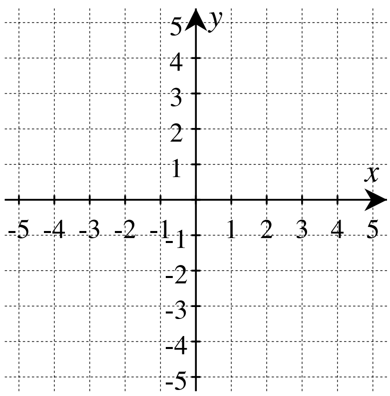
Les **solutions** d'une inéquation linéaire sont **tous les points de l'un de ces demi-plans**, la droite frontière étant incluse pour ≤ ou ≥, pas incluse pour < ou >.

http://www.javmath.ch

Modèle 1: Représenter graphiquement les 2 inéquations suivantes :

a) $3x - 4y > 12$ **b)** $x + y \leq 3$





Truc: *Pour repérer rapidement le bon demi-plan défini par une inéquation, il suffit de regarder si le point (0 ; 0) est du bon côté de la droite frontière.*

Exercice 7.1: Représenter graphiquement l'inéquation :

a) $-3x + 2y > -6$ **b)** $4x + 3y < 12$
c) $2x + 3y \geq 2y + 1$ **d)** $2x - y \geq 3$

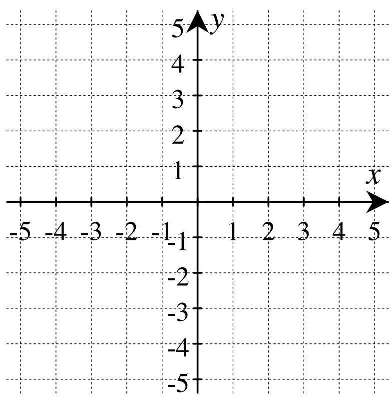
7.2 Systèmes d'inéquations linéaires

Comme nous l'avons fait avec les équations, nous travaillons parfois simultanément avec plusieurs inéquations à deux inconnues, c'est-à-dire, avec un système d'inéquations.

Les solutions d'un **système d'inéquations sont** les **solutions** communes à toutes les inéquations du système. Le **graphique** d'un système d'inéquations correspond à une région R du plan contenant les points correspondants aux solutions. Le modèle suivant illustre une méthode pour représenter les solutions d'un système d'inéquations.

Modèle 2: Représenter graphiquement le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$



Exercice 7.2: Représenter graphiquement le système d'inéquations :

a) $\begin{cases} 3x + y < 3 \\ -2 + y < 2x \end{cases}$

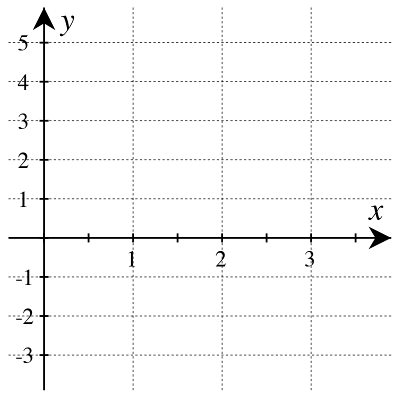
b) $\begin{cases} y + 2 < 2x \\ y - x < 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - x < 0 \\ 2x + 5y < 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3y + 2x > 6 \end{cases}$

Modèle 3: **a)** Représenter graphiquement le système d'inéquations :

$$\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 5x - 3y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



b) Les points $P(3\,;1)$ et $Q(1\,;2)$ vérifient-ils le système d'inéquations ?

Exercice 7.3: Représenter graphiquement le système d'inéquations :

a) $\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ 4x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

7.3 Polygone des contraintes

Nous avons observé que si un système d'inéquations contient uniquement des inéquations linéaires de la forme :

$$ax + by \leq c \quad \text{ou} \quad ax + by \geq c$$

où a, b et c sont des nombres réels,

alors la représentation graphique de ce système est une région *R limitée ou non* du plan par un polygone convexe. Dans le cadre des exercices de programmation linéaire, cette région sera appelée **le polygone des contraintes**.

Modèle 4: Dans une usine d'informatique :

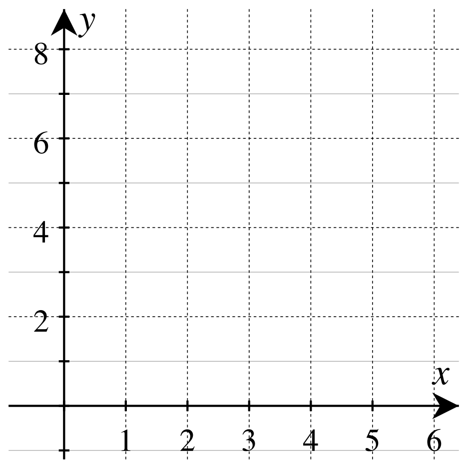
- Pour construire une carte mère de type A, il faut 4 mémoires de type M_1 et 3 mémoires de type M_2.
- Pour construire une carte mère de type B, il faut 2 mémoires de type M_1 et 3 mémoires de type M_2.
- L'usine ne peut disposer par jour que de 16 mémoires de type M_1 et de 15 mémoires de type M_2.

On note x le nombre de cartes mères de type A et y le nombre de cartes mères de type B produites chaque jour.

a) Écrire un système d'inéquations traduisant les contraintes imposées à l'usine.

b) Représenter graphiquement cette zone de contraintes.

c) Le point $P(3 ; 1)$ vérifie-t-il le système de contraintes ?



Exercice 7.4: Un artisan fabrique deux types de jouets en bois A et B.

- Un jouet A nécessite 1/2 heure de travail et 3 kg de bois.
- Un jouet B nécessite 1 heure de travail et 2 kg de bois.

L'artisan ne doit pas travailler plus de 8 heures par jour et ne doit pas utiliser plus de 24 kg de bois par jour.

On note x le nombre de jouets A et y le nombre de jouets B fabriqués par jour par l'artisan.

a) Écrire un système d'inéquations traduisant les contraintes imposées à l'artisan.
b) Représenter graphiquement le polygone R des contraintes.

Exercice 7.5: Le comité des fêtes d'une commune organise un repas pour 150 personnes.

- Chaque personne doit disposer de 3 assiettes en carton, de 2 verres et de 4 serviettes en papier.
- Un magasin propose un lot de type A comprenant 50 assiettes, 50 verres et 50 serviettes pour 50 francs.
- Un autre magasin propose un lot de type B comprenant 30 assiettes, 25 verres et 60 serviettes pour 40 francs.

On note x le nombre de lots de A et y le nombre de lots B prévus pour la fête.

a) Écrire un système d'inéquations traduisant les contraintes.
b) Représenter graphiquement le polygone R des contraintes.

Exercice 7.6: Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises A et B.

- L'approvisionnement en tissu est suffisant pour 400 chemises par jours (modèle A et modèle B).
- Le temps de fabrication pour le modèle A est égal à trois fois le temps de fabrication pour le modèle B et si toutes les chemises étaient du modèle B, l'entreprise pourrait en fabriquer au maximum 600 par jour.
- Grâce à une étude de marché, on sait que l'on ne peut pas écouler plus de 150 chemises du modèle A et 350 du modèle B.

On note x le nombre de chemises du modèle A et y le nombre de chemises du modèle B.

a) Écrire un système d'inéquations traduisant les contraintes.
b) Représenter graphiquement le polygone R des contraintes.

7.4 Programmation linéaire ou comment optimiser une fonction à 2 variables ?

Dans les problèmes de **programmation linéaire**, nous traitons de tels systèmes d'inéquations conjointement avec une fonction à 2 variables de la forme :

$$f(x\,;y) = ax + by + c$$

où a, b et c sont des nombres réels et $(x\,;y)$ est un point dans le polygone de contrainte *(c'est-à-dire une solution du système).*

f est appelée une **fonction économique**.

Les solutions du système, c'est-à-dire les couples $(x\,;y)$ correspondant aux points dans le polygone des contraintes, sont appelées les **solutions possibles** du problème.

Dans les applications commerciales, la valeur f peut représenter le coût, le gain, la perte ou une ressource physique, et l'objectif sera de trouver un point précis $P(x\,;y)$ dans R où $f(x\,;y)$ prend une valeur maximum ou minimum.

Exercice 7.7: On considère la fonction économique $f(x\,;y) = 3x + 6y$ soumis aux contraintes :

$$\begin{cases} 2x+3y \geq 12 \\ x+3y \geq 9 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

a) Avant de représenter le polygone R des contraintes, montrer que le point $A(8\,;4)$ vérifie bien le système des contraintes.

b) Représenter le polygone R des contraintes.

c) Montrer que le point $B(4\,;3)$ vérifie bien le système d'inéquations.

d) Parmi ces 2 points A et B, lequel minimise le mieux la fonction économique ?

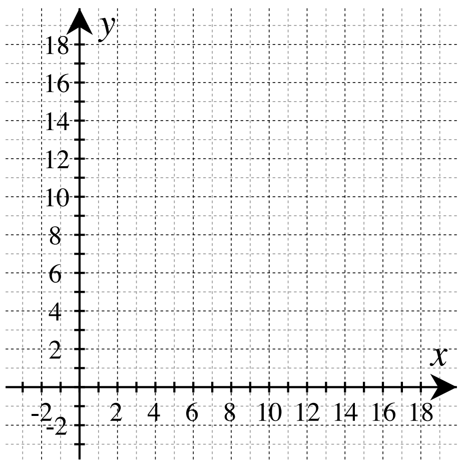
e) Quel pourrait être le point $P(x\,;y)$ de R minimisant la fonction économique ?

Modèle 5: À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat. En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste **18** kg de cacao, **8** kg de noisettes et **14** kg de lait.

Il a deux spécialités : l'oeuf *Extra* et l'oeuf *Sublime*.

- Un oeuf *Extra* nécessite **1** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **2** kg de lait.
- Un oeuf *Sublime* nécessite **3** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **1** kg de lait.

Il fera un profit de **20** fr. en vendant un oeuf *Extra*, et de **30** fr. en vendant un oeuf *Sublime*.
Combien d'oeufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?



Remarques :

- Dans cet exemple introductif, le résultat est en nombres entiers, ce n'est de loin pas toujours le cas.
- On constate que le chocolatier va utiliser complètement deux de ces trois ingrédients.
- Seuls les couples $(x\,;\,y) \in R$ satisfont toutes les contraintes. Mais en fait, la solution optimale sera **toujours** l'un des sommets du polygone délimitant le domaine R.
- La fonction économique est une droite qui doit couper l'axe Oy le plus haut possible dans le cas d'une maximisation et le plus bas possible dans le cas d'une minimisation.

Démarche:

1. On pose x et y les 2 inconnues apparaissant dans le problème.

2. On traduit toutes les contraintes en un système d'inéquations.

3. On exprime la fonction économique $f\,(x\,;\,y)$ à optimiser.

4. On représente le polygone R des contraintes.

5. On trace la droite représentant la fonction f et passant par l'origine.

6. On translate cette droite.

7. Le point optimal P est le dernier point du domaine R que la droite de la fonction f touchera lors de son déplacement.

8. Déterminer algébriquement les coordonnées du point P.

9. On répond finalement à la question posée par une phrase.

Exercice 7.8: Une entreprise fabrique deux types de boîtes en métal. La fabrication d'une boîte de type A demande 1 heure de travail et 3 kg de métal alors que le type B demande 2 heures de travail et 2 kg de métal. L'entreprise dispose de 80 heures de temps de travail et de 120 kg de métal.

a) Sachant que, pour une boîte, le profit est de 20 francs pour le type A et de 30 francs pour le type B, comment organiser la production afin de maximiser le profit ?

b) Après une restructuration dans l'entreprise, les profits sont modifiés en 50 francs pour le type A et 20 francs pour le type B. Faut-il alors modifier le plan de production afin de maximiser le profit ?

http://www.javmath.ch

Exercice 7.9: Une petite communauté désire acquérir des camionnettes et des petits bus usagés pour son système de transports publics. La communauté ne peut pas dépenser plus de 200'000 fr. pour les véhicules et pas plus de 1'000 fr. par mois pour l'entretien. Les camionnettes coûtent 20'000 fr. pièce et en moyenne 200 fr. par mois pour l'entretien. Les coûts approximatifs correspondants pour chaque bus sont de 40'000 fr. et 150 fr. par mois. Sachant que chaque camionnette peut transporter 15 passagers et chaque bus 25 voyageurs, trouver le nombre de camionnettes et de bus à acheter pour que la capacité en passagers du système soit maximale.

Exercice 7.10: Un ébéniste fabrique des tables et des armoires avec trois sortes de bois: chêne, pin et noyer. Dans le tableau suivant, on donne le nombre de mètres carrés de bois nécessaire à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés de bois disponible.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210
Pin	5	2.5	180
Noyer	6	5	240

Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum si

a) il gagne CHF 1000.- par armoire et CHF 900.- par table;
b) il gagne CHF 1200.- par armoire et CHF 1000.- par table.

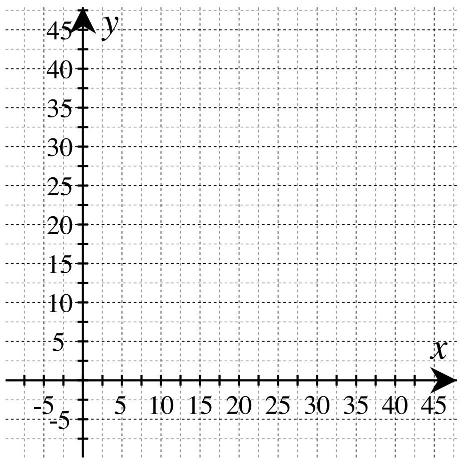
Exercice 7.11: Une fabrique d'automobiles construit, deux modèles A et B. Chaque jour, elle peut produire au maximum 600 voitures A et 300 voitures B, mais en raison d'un manque de personnel, elle ne peut produire plus de 750 voitures en tout. Le bénéfice est de CHF 1200.- pour une voiture du modèle A et de CHF 1800.- pour une voiture du modèle B.

a) Combien de voitures de chaque modèle doit-elle produire pour que le bénéfice soit maximum ?

b) Comment se modifie cette situation si la production du modèle B ne peut dépasser la moitié de celle du modèle A ?

Modèle 6: Une entreprise chimique livre deux types de mélanges *P* et *T* obtenus à partir des trois éléments *A*, *B* et *C* selon les pourcentages et prix de production donnés par le tableau ci-dessous. Calculer les quantités de mélanges *P* et *T* à produire pour satisfaire les besoins en produits *A*, *B* et *C* donnés dans le tableau suivant à un prix minimum.

	P	*T*	Besoins (kg)
A	20%	40%	≥ 7
B	30%	50%	≥ 2
C	20%	10%	≥ 4
Prix par kg	10	8	



Exercice 7.12: On désire préparer des rations alimentaires contenant au moins 90 g de protéines, 120 g d'hydrates de carbone et 2400 calories à partir de deux produits A et B. Une dose du produit A coûte 1 franc et contient 15 g de protéines, 20 g d'hydrates de carbone et 300 calories. Une dose de produit B coûte 1 franc et contient 10 g de protéines, 30 g d'hydrates de carbone et 400 calories.
Quelle est la composition de la ration alimentaire la plus économique ?

Exercice 7.13: Un grossiste distribue chaque jour à diverses boucheries 17'800 kg de viande fraîche et 11'000 kg de viande congelée. Pour cette distribution, il dispose de deux types de camions A et B. Un camion de type A peut transporter 600 kg de viande fraîche et 300 kg de viande congelée ; un camion de type B peut transporter 500 kg de viande fraîche et 400 kg de viande congelée. Avec un camion de type B, le transport coûte 120% de ce qu'il est avec un camion de type A .

Combien de camions de chaque type doit-il utiliser pour minimiser les frais de transport ?

Exercice 7.14: Afin de financer un voyage d'études, une classe du gymnase projette d'installer un stand dans une kermesse pour vendre des paquets de cacahuètes et des paquets de bonbons. Elle possède 800 fr. pour acquérir son stock, dont le coût serait de 80 ct. par paquet de cacahuètes et de 1,60 fr. par paquet de bonbons.
Elle a l'intention de vendre les cacahuètes 2 fr. le paquet et les bonbons 3,20 fr. le paquet. Son stand peut contenir 500 paquets de cacahuètes et 400 paquets de bonbons. Par expérience, elle sait qu'elle ne vendra pas plus de 700 paquets au total.Trouver le nombre de paquets de chaque sorte qu'elle devrait avoir à disposition pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est le bénéfice maximal ?

Exercice 7.15: Une compagnie produit deux types de fertilisants A et B livrés en sacs de 100 kg. Les pourcentages en nitrate, phosphate et potasse ainsi que les profits pour chaque type sont donnés dans le tableau ci-dessous avec les quantités disponibles de nitrate, phosphate et potasse.

Calculer les quantités de fertilisants de chaque type à produire pour maximiser le profit en tenant compte de la disponibilité des matières premières.

	A	B	Disponible (kg)
Nitrate	20%	10%	$\leq$ 700
Phosphate	5%	15%	$\leq$ 400
Potasse	5%	10%	$\leq$ 400
Profit par sac	18.-	12.-	