

Exercice A4.1: Prouver la 3^{ème} règle de dérivation

Exercice A4.2: Voici la preuve de la 5^{ème} règle ci-dessus qu'il s'agit de compléter

Hypothèse : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
 Conclusion : $h'(x) = \dots\dots\dots$

Preuve :

$$\bullet h'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

Truc : on ajoute et on retranche au numérateur l'expression $f(a) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x) - \dots\dots\dots + \dots\dots\dots - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[g(x) \cdot \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{x - a} + f(a) \cdot \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{x - a} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\dots\dots\dots - \dots\dots\dots}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot f'(a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \cdot g'(a) = g(\dots\dots\dots) \cdot f'(\dots\dots\dots) + f(\dots\dots\dots) \cdot g'(\dots\dots\dots) \end{aligned}$$

En réorganisant les termes et en changeant la variable de a en x , on obtient bien :

$$h'(x) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

Exercice A4.3: Prouver la 3^{ème} règle de dérivation

A.2 La dérivée de fonctions, un autre calcul de limite

Exercice A4.4: Soit une fonction f donnée, on définit une nouvelle fonction f^* par le calcul suivant :

$$f^*(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a) Calculer f^* pour les 2 fonctions f suivantes :

$$f(x) = x^2 + 4 \quad \text{et} \quad f(x) = 1/x$$

b) Que constatez-vous ?

c) Justifier votre dernière affirmation par des calculs ou des esquisses judicieusement choisis.

A.3 La dérivée de fonctions composées et de fonctions réciproques

Introduction Nous avons déjà eu l'occasion de dériver quelques fonctions composées ; en effet les fonctions :

- $f(x) = \sqrt{x-2}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \dots\dots\dots \text{ et } h(x) = \dots\dots\dots$$

- $f(x) = (3x-5)^3$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \dots\dots\dots \text{ et } h(x) = \dots\dots\dots$$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

$$g(x) = \dots\dots\dots \text{ et } h(x) = \dots\dots\dots$$

Lors du calcul de ces 3 dérivées, nous avons vu apparaître ce que nous avons appelé la **dérivée interne**. Ceci se généralise lors du calcul de la dérivée de toutes les fonctions composées.

Les règles de dérivation des fonctions composées :

$$\text{r\`egle : Si } f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Exercice A4.5: Utiliser la règle ci-dessus pour calculer la dérivée des 3 fonctions proposées ci-dessus.

Exercice A4.6: Compléter la démonstration de cette nouvelle règle :

Hypothèse : $f(x) = g(h(x))$

Conclusion : $f'(x) = \dots\dots\dots$

Preuve :

$$(g \circ h)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(g \circ h)(x + \Delta x) - \dots\dots\dots}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \dots\dots\dots}{\Delta x}$$

Truc : on amplifie la fraction par $h(x + \Delta x) - h(x)$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \dots\dots\dots}{\Delta x} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{\Delta x}$$

On pose grâce à un changement de variable :

$$z = h(x) \Rightarrow h(x + \Delta x) = z + \Delta z \Leftrightarrow \Delta z = \dots\dots\dots$$

D'où

$$(g \circ h)'(x) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{g(z + \Delta z) - \dots\dots\dots}{\Delta z}}_{\dots\dots\dots} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{h(x + \Delta x) - \dots\dots\dots}{\Delta x}}_{\dots\dots\dots}$$

$$= g'(z) \cdot h'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Exercice A4.7: a) Démontrer, en appliquant deux fois la *Règle de dérivation du produit*, que si f , g et h sont des fonctions dérivables, alors :

$$(f \cdot g \cdot h)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

b) Montrer qu'en particulier si $f = g = h$ alors

$$([f(x)]^3)' = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

A.4 Équation d'une tangente, une formule bien pratique

Exercice A4.8: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Théorème L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $T(x_0 ; f(x_0))$ est donnée par

Une formule plus rapide

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice A4.9: Prouver la formule proposée ci-dessus.

Exercice A4.10: Déterminer les équations des tangentes aux courbes $y = f(x)$ ci-dessous

a) $y = 5x^2 - 6x + 2$ au point $P(1 ; f(1))$

b) $y = \frac{3x-2}{5x+1}$ au point $P(0 ; f(0))$

c) $y = \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ au point $P(4 ; f(4))$

Exercice A4.11: La courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ porte le nom de **sorcière de Maria Agnesi**. Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point P d'abscisse $x = -1$.

