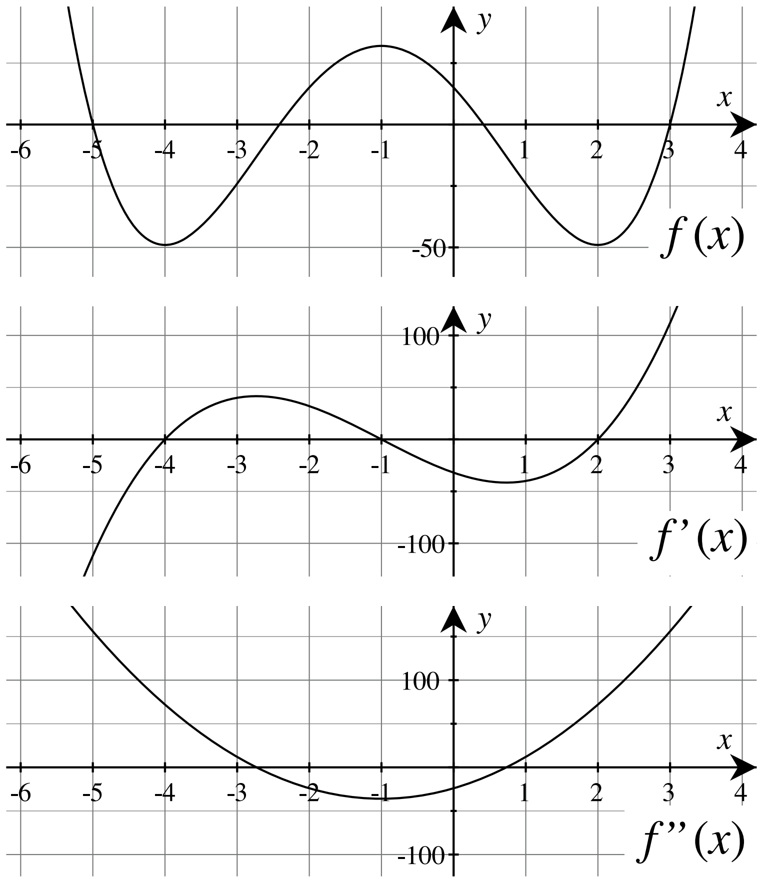
Annexe du chapitre 5: Croissance et étude de fonctions

Exercice A5.1: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 32x + 15$.

a) Déterminer $f'(x)$ ainsi que ses zéros.

b) Déterminer $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ ainsi que ses zéros.

Voici la représentation graphique de ces 3 fonctions



La suite de l'exercice consistera à comparer les 3 courbes pour déduire le lien entre le graphe de f et sa dérivée seconde f''

c) Recopier puis compléter les phrases suivantes (en justifiant)

- $f''(x) > 0$ mais diminue pour $x \in$]-5,2 ; -2,73[alors
  $f'(x)$ …………………………………………………………………
  $f(x)$ …………………………………………………………………
- $f''(x) < 0$ diminue puis augmente pour $x \in$]-2,73 ; 0,73[alors
  $f'(x)$ …………………………………………………………………
  $f(x)$ …………………………………………………………………
- $f''(x) > 0$ mais augmente pour $x \in$]0,73 ; 3,2[alors
  $f'(x)$ …………………………………………………………………
  $f(x)$ …………………………………………………………………
- $f''(x) = 0$ alors $f'(x)$ ……………………………………………………
  $f(x)$ ……………………………………………………

A.1 La deuxième dérivée

Que dit f'' à propos de f ?

Voyons comment le signe de f'' se marque dans le graphique de f. Comme $f'' = (f')'$, nous savons que quand f'' est strictement positive, alors f' croît. Cela se traduit encore par le fait que de la gauche vers la droite les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont de plus en plus fortes. C'est le cas, par exemple, du graphique de la figure 1. La pente des tangentes à cette courbe devient progressivement de plus en plus grande à mesure que x augmente et nous observons que, par voie de conséquence, le tracé s'incurve vers le haut. Une telle courbe est dite **convexe**. À la figure 2 par contre, f'' est strictement négative, ce qui veut dire que f' est strictement décroissante. Dès lors, la pente des tangentes de f diminue de gauche à droite et le tracé s'incurve vers le bas. Cette courbe est dite **concave**.

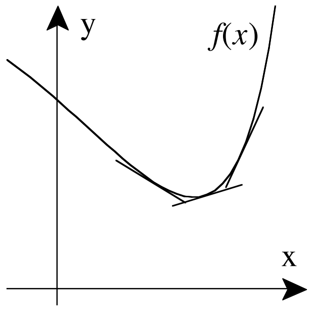


Figure 1 :
si $f''(x) > 0$, la pente des tgtes augmente et $f(x)$ est convexe

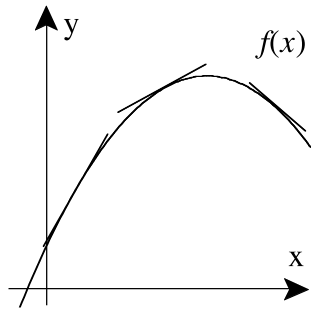
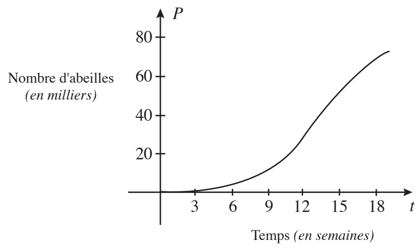


Figure 2 :
si $f''(x) < 0$, la pente des tgtes diminue et $f(x)$ est concave

Exemple : La figure ci-dessous montre graphiquement l'évolution d'une population d'abeilles dans un rucher.



a) Comment le taux d'accroissement de cette population change-t-il dans le temps ?
b) À quel moment ce taux est-il le plus fort.
c) Sur quels intervalles cette courbe est-elle convexe ou concave ?

Solution : *a) et b) En observant la pente des tangentes à la courbe pendant que t augmente, nous voyons que le taux de croissance de la population est d'abord très faible, qu'il grandit ensuite jusqu'à atteindre un maximum aux environs de t = 12 semaines, et enfin qu'il décroît de sorte que la population tend à se stabiliser. Au moment où la population approche son maximum d'à peu près 75'000, le taux d'accroissement P'(t), tend vers 0.*

c) La courbe est convexe sur $]0\,;12[$ *et concave sur* $]12\,;18[$.

Dans cet exemple, la courbe est d'abord convexe puis est devenue concave au point (12 ; 28'000). Un tel point s'appelle un **point d'inflexion** de la courbe. Il s'obtiendra comme le <u>zéro de la deuxième dérivée</u> et le signe de f'' doit changer en ce point.

Exercice A5.2: Tracer le graphe d'une fonction dont la première et la deuxième dérivée sont négatives.

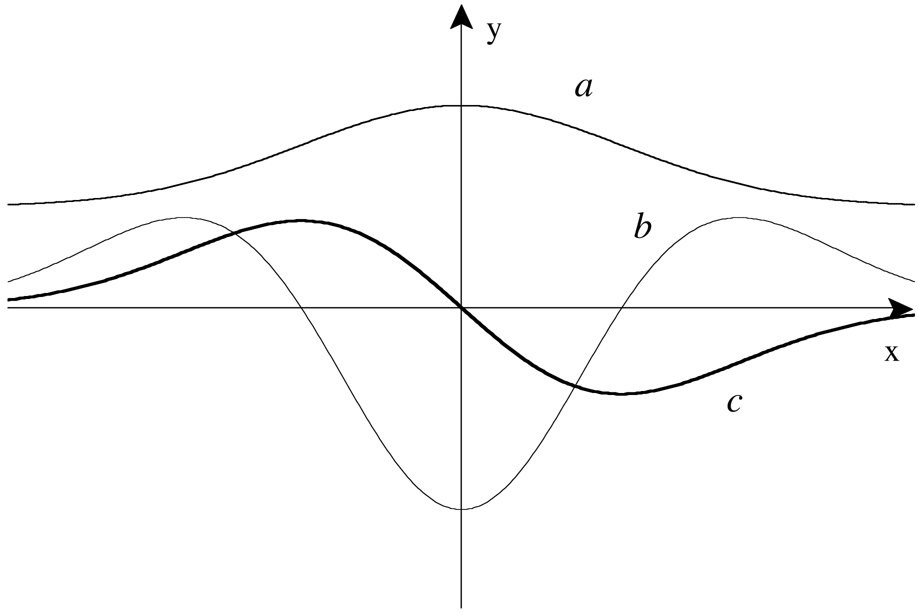
Exercice A5.3: Tracer le graphe d'une fonction dont la première dérivée est toujours négative et la deuxième dérivée toujours positive.

Exercice A5.4: Un chef d'état annonce que la dette publique augmente, mais de moins en moins vite. Interpréter cette annonce en termes de fonction et de ses dérivées.

Exercice A5.5: La table suivante donne les densités de faisans dorés (nombre de faisans par km²) sur une île du Pacifique. Situer les points d'inflexion. Quelle est leur signification ?

t	1935	1950	1960	1970	1980	1990	2000
$P(t)$	0,1	0,6	2,5	4,6	4,8	3,5	3,0

Exercice A5.6: La figure montre le graphique de f, f' et f''. Identifier chaque courbe et justifier votre choix.



Exercice A5.7: **a)** Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $y = x^4$.
b) Proposer une esquisse de cette courbe.

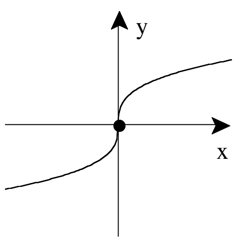
Exercice A5.8: L'affirmation suivante est en toute généralité fausse. Justifiez pourquoi et proposez une correction.

« Soit une fonction $f(x)$ tel que $f''(a) = 0$ alors la fonction admet un point d'inflexion en $x = a$ »

Concave, convexe ? Un bon moyen *mnémotechnique* pour identifier si une courbe est convexe ou concave consiste à se souvenir de ces figures :

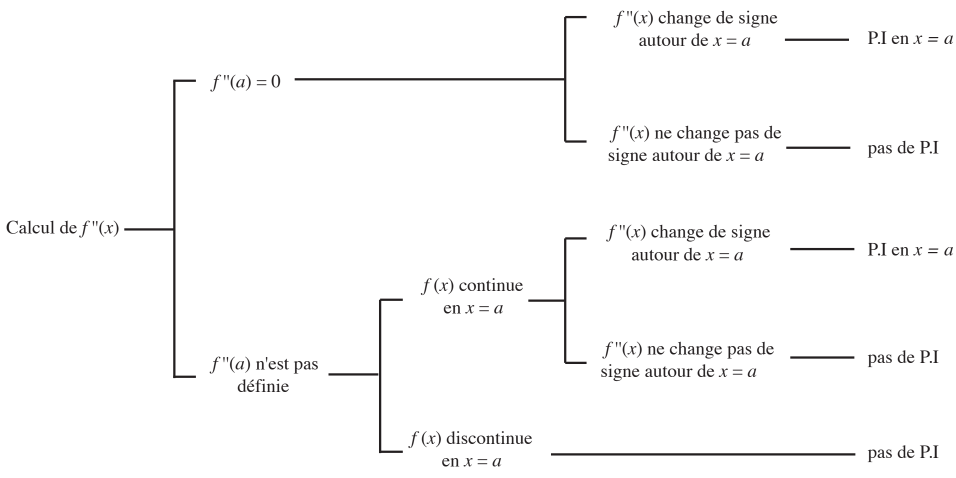
Exercice A5.9: Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 6$ est concave. Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

Exemple : Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = \sqrt[3]{x}$ est concave. Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.



Constatation : Dans l'exemple précédent, la deuxième dérivée n'est pas définie en $x = 0$ mais change néanmoins de signe. Comme la fonction elle-même est continue en ce point, le point $(0 ; 0)$ est bien un point d'inflexion comme le montre le petit graphique ci-contre.

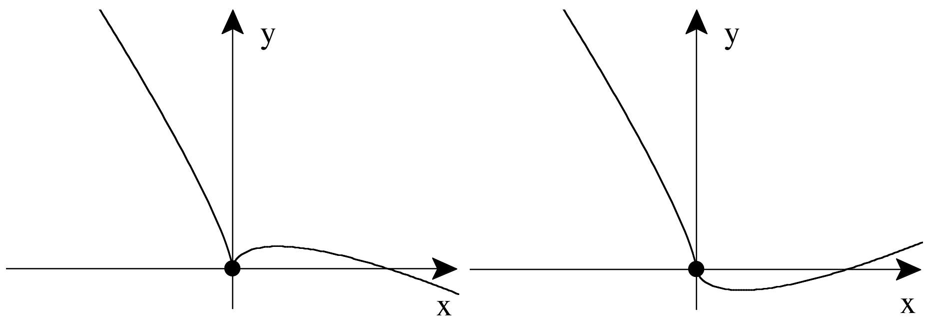
En résumé



Exercice A5.10: **a)** Déterminer l'ensemble sur lequel la courbe $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - x$ est convexe.

b) Déterminer également les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

c) Lequel de ces graphiques semble correspondre à la situation ?



Exercice A5.11: À l'aide uniquement d'informations obtenues grâce à la 1ère et à la 2ème dérivée, esquisser la courbe :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

Exercice A5.12: Compléter les 3 affirmations suivantes en justifiant :

- Soit $f(x)$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ alors $x = a$ est ……………
- Soit $f(x)$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors $x = a$ est ……………
- Soit $f(x)$ tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$ en changeant de signes en $x = a$ alors $x = a$ est ……………

Exercice A5.13: À l'aide de l'exercice précédent et sans aucun tableau de signes, déterminer les minima ou maxima de la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 27$$

Exercice A5.14: Dessiner une représentation graphique possible d'une fonction f qui satisfait aux 3 conditions suivantes :

- $f'(x) > 0$ sur] -∞ ; 1 [puis $f'(x) < 0$ sur] 1 ; +∞ [,
- $f''(x) > 0$ sur] -∞ ; -2 [et] 2 ; +∞ [; $f''(x) < 0$ sur] -2 ; 2 [,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice A5.15: Dessiner une courbe représentant la fonction f qui satisfait aux 3 conditions suivantes

- $f'(-1) = f'(1) = 0$; $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$;
- $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$;
- $f''(x) < 0$ si $x < 0$; $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

Exercice A5.16: **a)** Étudier la fonction f définie par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

On demande la dérivée seconde afin de compenser le fait que certaines étapes de l'étude ne sont pas immédiates…

b) Étudier la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{(x+2)^2}{4+x^2}$

avec la dérivée seconde et l'étude de la courbure.

Exercice A5.17: Et… un petit plus costaud…

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{|x| + 1}$

avec la dérivée seconde et l'étude de la courbure.