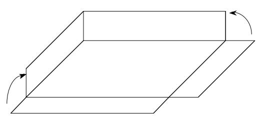
Chapitre 7: Optimisation

Prérequis: Généralités sur les fcts, Calcul de dérivées, Croissance ***Requis pour***: Examen de maturité

7.1 Optimisation

Introduction

Dans beaucoup d'applications, les grandeurs physiques ou géométriques sont exprimées à l'aide d'une formule contenant une fonction. Il peut s'agir de la température d'un corps au moment x, du volume d'un gaz dans un ballon sphérique de rayon x, de la vitesse d'un corps au temps t, …



Disposant de cette fonction, sa dérivée pourra nous être utile pour déterminer ses valeurs extrêmes. Celles-ci sont parfois appelées valeurs optimales parce que, vu leur signification, elles constituent les valeurs les plus favorables. Déterminer ces valeurs constitue ce que l'on appelle un *problème d'optimisation*.

Plan de résolution

Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation:

① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en réalisant parallèlement une figure d'étude pour y indiquer toutes les informations.

② Exprimez la quantité **Q** à optimiser (une aire, un volume, des coûts, . . .) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

③ Si **Q** dépend de plus d'une variable, disons n variables, trouvez au moins (n – 1) équations liant ces variables.

④ Utilisez ces équations pour exprimer **Q** comme fonction d'une seule variable (par substitutions).

⑤ Déterminez l'ensemble de définition E_D des valeurs admissibles de cette variable.

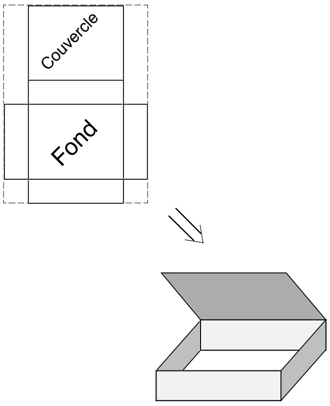
⑥ Calcul de la dérivée de **Q**, fonction à optimiser.

⑦ À l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de **Q**, étudiez la croissance de cette fonction.

⑧ Calculez les extremums de **Q** sans oublier de contrôler ce qui se passe au bord de E_D.

⑨ Répondez finalement à la question posée à l'aide d'une phrase.

Exemple 1: On dispose d'une feuille de carton rectangulaire dont les dimensions sont 48×35 cm. On y découpe le patron représenté ci-contre que l'on referme selon les plis pour créer une boîte avec son couvercle. Quel sera le volume maximal de la boîte que l'on pourra ainsi construire ?



Étape ①: Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) puis indiquer sur la figure toutes les informations.

Étape ②: Exprimez la quantité v à optimiser comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

Étape ③: Comme v dépend de 3 variables, trouvez 2 équations liant ces variables.

Étape ④: Utilisez ces équations pour exprimer v comme fonction d'une seule variable (par substitutions).

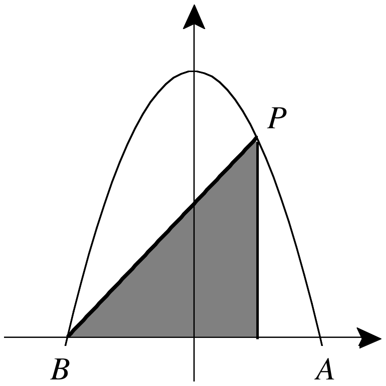
Étape ⑤: Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble:

Étape ⑥: La dérivée de V(x) est:

Étape ⑦: Signe de V '(x) et croissance de V(x)

Étape ⑧: Au bord du domaine puis réponse finale

Exemple 2: La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.



Le point $P(x\ ;\ y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.

Déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle grisé soit maximum.

Étape ①: Relire l'énoncé du problème:

Étape ②: La quantité à optimiser est .... Son expression est:

Étape ③: Effectuer les calculs nécessaires pour exprimer cette aire :

Étape ④: La quantité à optimiser en fonction d'une seule inconnue:

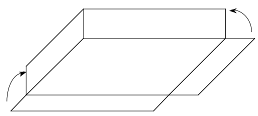
Étape ⑤: Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble:

Étape ⑥: La dérivée de A(x) est:

Étape ⑦: Signe de A '(x) et croissance de A(x)

Étape ⑧: Au bord du domaine puis réponse finale

Exercice 7.1 : On enlève un carré à chaque coin d'une pièce de carton rectangulaire de 22 cm x 18 cm et on relève ensuite les rectangles latéraux pour former une boîte sans couvercle. Quelle doit être la dimension des 4 carrés enlevés pour obtenir la boîte de volume maximale ?

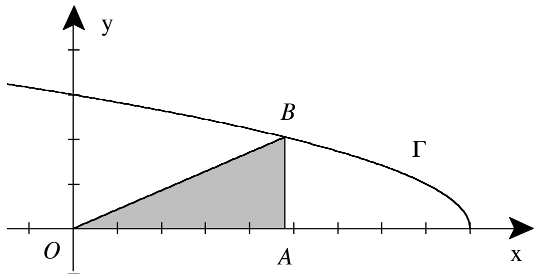


Exercice 7.2 : Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 7.3 : On veut clôturer un pâturage de forme rectangulaire devant avoir une superficie d'un kilomètre carré.

Le pâturage est borné par une route rectiligne sur l'un de ses côtés. Pour clôturer le long de la route, il en coûte 500.- fr. le km, clôturer les autres côtés revient à 300.- fr. le km. Quelles sont les dimensions du pâturage qui minimisent les coûts ?

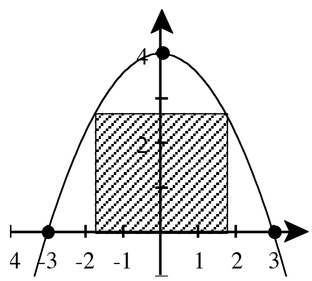
Exercice 7.4 : On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9 - x}$



Déterminer les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle soit maximale.

Exercice 7.5 : Soit la parabole de sommet $S(0\ ;4)$. Le rectangle hachuré a une aire maximale.

Quelles sont ses dimensions ?



Exercice 7.6 : On considère le triangle $A(3\ ;\ 0)$, $B(-3\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 6)$. On inscrit dans ce triangle un rectangle $PQRS$ dont le côté PQ s'appuie sur AB. Déterminer pour quelle abscisse de P le rectangle ainsi construit a une aire maximale.

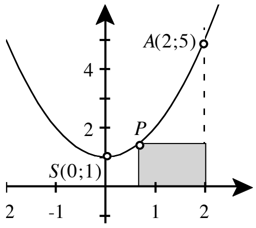
Exercice 7.7 : Trouver les points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

Exercice 7.8 : Déterminer, pour un volume donné de $V = 1{,}75\ \text{dm}^3$, les dimensions de la boîte cylindrique qui utilise le minimum de matière première.

Exercice 7.9 : Soit ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. M est un point de AB. La parallèle à BC passant par M coupe AC en N; la parallèle à AB passant par N coupe BC en P. On pose $AM = x$.

a) Pour quelle valeur de x l'aire du parallélogramme $MNPB$ est-elle maximum ?
b) Pour quelle valeur de x le parallélogramme $MNPB$ est-il un losange ?

Exercice 7.10 :



a) Déterminer l'équation de la parabole.

b) Pour quel point $P(x\ ;\ y)$ de la parabole l'aire du rectangle grisé est-elle maximale ?

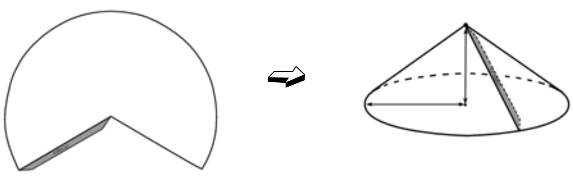
$$0 \le x \le 2$$

c) Calculer l'aire maximale du rectangle grisé.

Exercice 7.11 : Une feuille de papier doit contenir $600\ \text{cm}^2$ de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celles de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille pour lesquelles il faudra un minimum de papier.

Exercice 7.12 : Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal?

Exercice 7.13 : On dispose d'un disque en carton flexible de rayon 10 cm, d'une paire de ciseaux et d'un tube de colle. Si l'on découpe un secteur du disque, on peut replier la partie restante et coller ensemble les arêtes découpées. On obtient ainsi un cône de révolution (voir figures).
Parmi tous les cônes possibles, fabriqués selon ce procédé, il en est un dont le volume est maximal. Calculer sa hauteur.

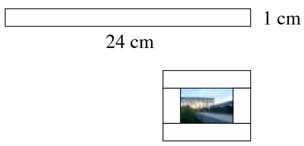


Exercice 7.14 : On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de

l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps de révolution ainsi obtenu ait:
a) le plus grand volume
b) la plus grande aire latérale
c) la plus grande aire totale

Exercice 7.15 : Un ébéniste veut fabriquer un tiroir dont la profondeur, du devant à l'arrière, est de 40 cm et dont le volume est de 10'000 cm^3. Si le devant du tiroir coûte 0,08 Fr par cm^2 et que le reste du tiroir coûte 0,04 Fr par cm^2.
Quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal ?

Exercice 7.16 : Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large. Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?



Exercice 7.17 : Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 1'500 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{600}{v} + \frac{v}{3}.$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 26 francs et le litre de gasoil coûte 2 francs.

a) Montrer que le prix de revient du voyage $P(v)$ peut s'exprimer en francs sous la forme $P(v) = \frac{57000}{v} + 10v$.

b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du voyage ?

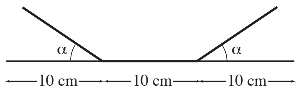
Pause sourire:

Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.
L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.
Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut tenir dans le cercle.
Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.

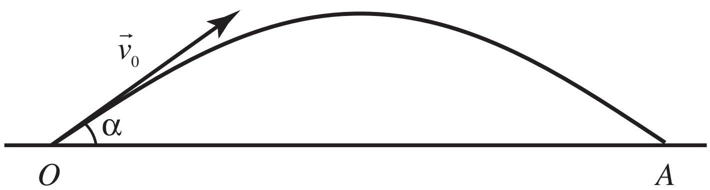
7.2 Optimisation avec des fonctions trigonométriques

Introduction : L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer la même démarche de résolution d'un problème d'optimisation, mais sur une fonction du type trigonométrique.

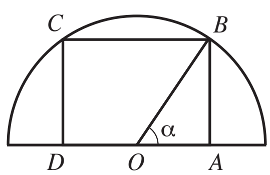
Exemple : Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



Exercice 7.18: La portée $P = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation α est donnée par $P = \dfrac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle la portée est maximale.

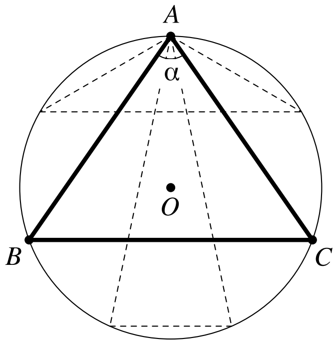


Exercice 7.19: Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un 1/2 cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer le rectangle d'aire maximale en prenant l'angle α comme variable.

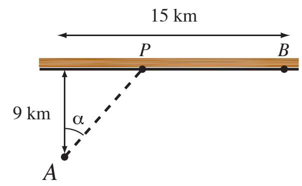


Exercice 7.20: Parmi tous les triangles ABC isocèles de sommet A inscrit dans un cercle de rayon 1, lequel admet une aire maximum.

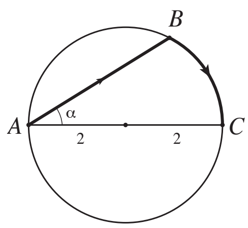
Indication: Travailler dans le triangle BOC.



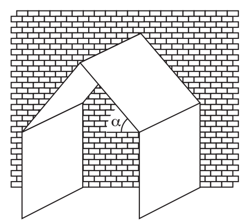
Exercice 7.21: Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.
Déterminer l'angle α puis la position du point d'accostage (point P) pour que le temps de parcours soit minimal.
La côte est supposée rectiligne.



Exercice 7.22: Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Elle peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h.
Selon quel angle α par rapport au diamètre doit-elle orienter sa barque ?



Exercice 7.23: **a)** Avec 4 planches carrées de côté 10 m, on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison.
Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.



b) Généraliser la démarche pour 4 planches de coté a.
Comparer les 2 parties de cet exercice.