Chapitre 2 : Distance point-droite et bissectrices

§ 2.1 L'équation normale d'une droite

Introduction : *L'équation normale d'une droite nous permettra de calculer la distance d'un point à une droite ainsi que d'établir les équations cartésiennes des bissectrices d'une paire de droites données.*

Définition : L'**équation normale** d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est définie par :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Exemple : Soit $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ l'équation cartésienne d'une droite. L'équation normale de cette droite est :

Exercice 2.1: Déterminer l'équation normale des droites suivantes :

a) $3x + 4y - 4 = 0$ **b)** $y = 2{,}4x - 0{,}4$

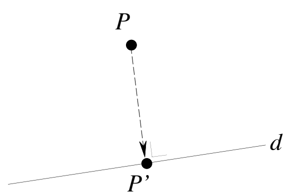
c) $15x + 8y - 7 = 0$ **d)** $y = \frac{4}{3}x - 5$

e) $y - 4 = 0$ **f)** $x = 5$

g) $y = x$ **h)** $6x - 8y = 29$

§ 2.2 Projection orthogonale et distance d'un point à une droite

Définition : Soit d une droite et P un point hors de d. On appelle **projection orthogonale de *P* sur *d*** le point P' de d tel que :



$$PP' \perp d$$

Exercice 2.2: **a)** Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-2 ; 6)$ sur la droite AB avec $A(0 ; -3)$ et $B(5 ; 0)$.
b) Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(12 ; 1)$ relativement à la droite $3x + 2y = 12$.

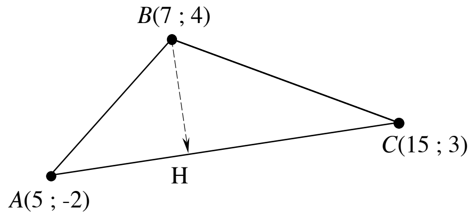
Exercice 2.3: On considère le triangle ABC donné par ses sommets :

$$A(2\ ;\ -3),\ B(3\ ;\ 2) \text{ et } C(-2\ ;\ 5)$$

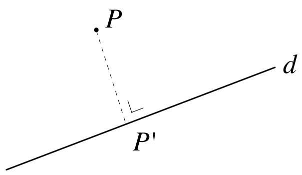
a) Déterminer la mesure de la hauteur issue de A.
b) En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 2.4: Soit le triangle ABC, on considère le point H projection orthogonale de B sur AC.

a) En déduire les coordonnées de H.
b) Déterminer $\left\|\overrightarrow{BH}\right\|$.
c) En déduire la distance entre le point B et la droite AC.



Définition : La **distance** du point P à la droite d est notée $\delta(P\ ;\ d)$. Elle est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$, où P' est la projection de P sur d.



THÉORÈME : La distance du point $P(x_P\ ;\ y_P)$ à la droite $(d) : ax + by + c = 0$ est donnée par la formule suivante:

$$\delta(P\ ;\ d) = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Preuve: l'utilisation et la mémorisation de cette formule sont prioritaires par rapport à une preuve.
Ainsi nous acceptons cette formule sans preuve.

Exemple : • Calculer $\delta(P\ ;d)$ où $(d) : 3x - 4y = 6$ $\quad P(1\ ; -2)$.

Une autre méthode sûre, mais longue consisterait à:
(a) Exprimer la pente de d puis la pente d'une droite $\perp$ à d
(b) Déterminer l'équation de la droite $g \perp$ à d et passant par P
(c) Déterminer le point $P' = d \cap g$
(d) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{PP'}$

• Soit encore la droite $(h) : x + y = 1$, trouver les points de h qui sont situés à une distance égale à 3 de d.

Exercice 2.5: Reprendre l'exercice **2.3** en utilisant la formule $\delta(A, d)$ où d est l'équation de BC.

Exercice 2.6: Calculer la distance du point A à la droite d:

a) $A(2 ; -1)$, $(d) : 4x + 3y + 10 = 0$

b) $A(0 ; -3)$, $(d) : 5x = 12y + 23$

c) $A(-2 ; 3)$, $(d) : 4y = 3x - 2$

d) $A(1 ; -2)$, $(d) : x = 2y + 5$

Exercice 2.7: Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2 ; -5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $(d) : x = 2y + 7$.

Exercice 2.8: Calculer l'aire d'un rectangle connaissant le sommet $A(-2 ; 1)$ ainsi que les équations de deux côtés non parallèles : $3x = 2y + 5$ et $4x + ay + 14 = 0$.

Exercice 2.9: Calculer la distance qui sépare les droites d'équation $4x - 3y = 8$ et $8x = 6y$, après avoir vérifié leur parallélisme. Déterminer l'équation de la droite g située à équidistance de ces 2 droites.

Exercice 2.10: Déterminer les équations des droites situées à distance 1 de la droite $4x - 3y = 8$.

Exercice 2.11: On donne 3 droites par leurs équations:

$$(d) : x + y = 1 \qquad (g) : 3x + 4y = 0 \qquad (h) : x + 5 = 0$$

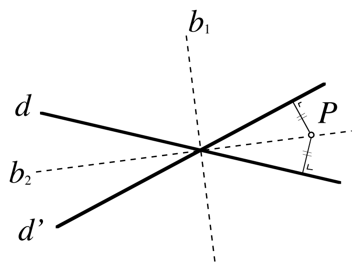
Calculer $P \in d$ tel que $\delta(P ; g) = 2 \cdot \delta(P ; h)$.

§ 2.3 Bissectrices de deux droites.

Remarque préliminaire : Un point P se trouve sur l'une des bissectrices des droites d et d'

$$\Updownarrow$$

$$\delta(P ; d) = \delta(P ; d').$$



On peut facilement prouver que les deux bissectrices sont perpendiculaires.

THÉORÈME: Soit d et d' deux droites sécantes :

$$(d) : ax + by + c = 0 \quad , \quad (d') : a'x + b'y + c' = 0.$$

Les équations des deux bissectrices de d et d' sont données par:

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

Preuve:

Exemple : Déterminer les équations des bissectrices des droites :

$$3x + 4y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{-5}{12}x + \frac{1}{12}.$$

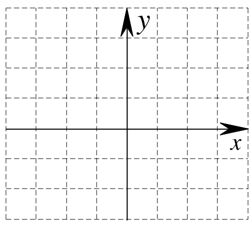
Exercice 2.12: **a)** Calculer les équations des bissectrices des droites d'équation

$$3x - 4y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 5x + 12y - 1 = 0.$$

b) Idem pour $x + 2y = 7$ et $4x - 2y - 9 = 0$.

Exemple : Déterminer les équations des bissectrices de l'axe Ox et de la droite d'équation (d) : $y = \frac{4}{3}x$.

Exemple : Quelle est, parmi les 2 solutions, la bissectrice passant dans le 1er quadrant ?



Exercice 2.13: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle obtus déterminé par les droites d'équation :

$$x = 3y - 5 \quad \text{et} \quad y = 3x + 15.$$

Exercice 2.14: On donne (d) : $y = x$ et (g) : $3x + 4y - 12 = 0$. Déterminer un point de d situé à la même distance de g et de l'axe Ox.

Exercice 2.15: Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y + 5$ et $4y = 6x + 7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.

Exercice 2.16: Déterminer les équations des bissectrices intérieures du triangle formé par $A(-5\ ;\ -5)$ $B(-5\ ;\ 10)$ $C(15\ ;\ -5)$.

Exercice 2.17: Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle, dont les côtés ont pour équation :

$(a) : 3y = 4x + 24$, $(b) : 12x + 5y = 33$, $(c) : 3x + 4y + 11 = 0$.

Exercice 2.18: Déterminer les équations des droites passant par $P(2 ; -1)$ et qui forment avec les droites d et g d'équation :
$y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$ des triangles isocèles en $A = d \cap g$.

Exercice 2.19: On donne deux droites $(d) : x + 7y = 23$ et $(g) : x - y + 9 = 0$, ainsi que les points $P(3 ; 0)$ et $Q(-9 ; 6)$.
Calculer les points qui sont à la fois équidistants de d et de g et équidistants de P et de Q.