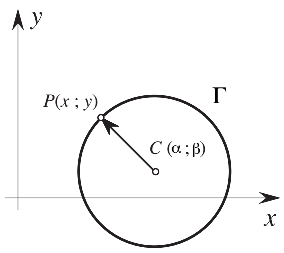
Chapitre 3 : Équation du cercle dans le plan

§ 3.1 Les deux formes d'équations de cercle



- **La forme "centre et rayon"**
  Soit Γ un cercle de centre $C(\alpha\ ;\ \beta)$ et de rayon R.

Le point $P(x\ ;\ y) \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \| \overrightarrow{CP} \| = R \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} \right\| = R$

$\Leftrightarrow \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

Formule : L'équation cartésienne du cercle centré en $C(\alpha\ ;\ \beta)$ et de rayon R est donnée par la formule:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

Exemple : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$ est l'équation d'un cercle centré en $C(4\ ;\ \text{-}1)$ et de rayon 3.

- **La forme développée**
  On rencontrera aussi des équations de cercle sous la forme développée : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Forme centre-rayon :
⇓
Forme développée

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Forme développée :
⇓
Forme centre-rayon

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

Exercice 3.1: Les équations suivantes sont-elles des équations développées de cercle ? Si oui, préciser le centre et le rayon

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ **b)** $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + x = 0$

Exercice 3.2: Déterminer l'équation du cercle défini par les conditions suivantes:

a) le centre est $C(2 ; -3)$ et le rayon vaut 7 ;
b) le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6 ; -8)$;
c) $[AB]$ est un diamètre du cercle où $A(3 ; 2)$ $B(-1 ; 6)$;
d) le centre du cercle est $C(1 ; -1)$ et le cercle est tangent à $(d) : 5x + 9 = 12y$;
e) le cercle passe par $A(3 ; 1)$ et $B(-1 ; 3)$ et est centré sur $(d) : 3x = y + 2$;
f) le cercle est tangent à $(d) : x + y = 4$ en $T(1 ; 3)$ et est centré sur Ox ;
g) le cercle passe par $A(-1 ; 5)$ $B(-2 ; -2)$ $C(5 ; 5)$.

Exercice 3.3: Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4x - 5y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites :

$$2x = 3y + 10 \text{ et } 2y = 3x + 5.$$

Exercice 3.4: Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2y = 1$ au point $T(3 ; ?)$.

Exercice 3.5: Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2x + y = 0$, est tangent aux droites :

$$3y = 4x + 10 \quad \text{et} \quad 4x = 3y + 30.$$

Exercice 3.6: Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0,$$

l'un des points de contact étant $T(1 ; 2)$.

Exercice 3.7: Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites :

$$3y = 4x - 10 \quad ; \quad 3x = 4y + 5 \quad \text{et } 3x - 4y = 15.$$

Exercice 3.8: On propose dans cet exercice une autre méthode pour déterminer l'équation d'un cercle passant par trois points

$$A(1 ; 1) \quad B(1 ; -1) \quad \text{et } C(2 ; 0).$$

Poser que l'équation du cercle est de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

et former un système de 3 équations à 3 inconnues.

Exercice 3.9: Soit les points $A(3 ; 3)$ et $B(5 ; 3)$. Déterminer l'ensemble E de tous les points $P(x ; y)$ du plan vérifiant $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{BP} = 8$.
Représenter la situation sur une figure d'étude.

§ 3.2 Intersections et position relative:

Exemple : • Combien y a-t-il de points d'intersection entre Γ et d si:

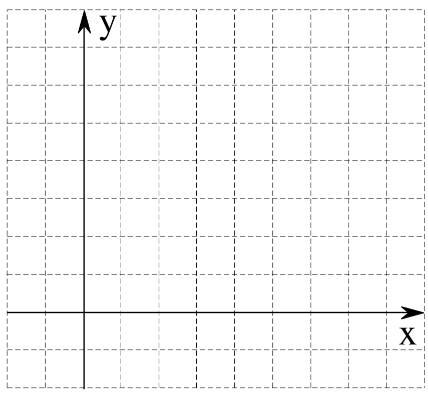
$$(\Gamma) : x^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad \text{et} \quad (d) : x - 2y + 1 = 0.$$

• Quelles sont les coordonnées de ces points d'intersection ?

Exemple : • Calculer les points d'intersection entre les cercles Γ et Γ' si :

$$(\Gamma) : (x - 1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad (\Gamma') : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$$

Représenter approximativement la situation :



Exercice 3.10: Quelle est la position du point $B(3 ; 9)$ par rapport au cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$?

Déterminer la plus courte distance d'un point de Γ au point B.

Exercice 3.11: Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs dans les cas suivants:

a) $y = 2x - 3$ $\quad x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$

b) $x - 2y - 1 = 0$ $\quad x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

c) $y = x + 10$ $\quad x^2 + y^2 = 1$

Exercice 3.12: Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle et la droite d'équations:

a) $x^2 + y^2 = 25$ et $2x - y - 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ et $3x - 4y - 19 = 0$

Exercice 3.13: Calculer la longueur de la corde commune aux cercles :

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 = 10x + 10y \qquad (\Gamma_2) : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Exercice 3.14: Déterminer l'équation du diamètre du cercle :

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$$

qui est perpendiculaire à la droite $5x + 2y = 13$.

Exercice 3.15: Calculer les points d'intersection entre le cercle $x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$ et les axes de coordonnées.

Exercice 3.16: Déterminer l'équation d'un cercle tangent à Ox et passant par $A(-2 ; 1)$ et $B(5 ; 8)$.

Exercice 3.17: Déterminer les équations des cercles tangents à $x + y - 10 = 0$ et passant par $A(7 ; 1)$ et $B(-5 ; 5)$.

Exercice 3.18: Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2y = 9$ et $y = 2x + 2$.

Exercice 3.19: Déterminer les équations des cercles passant par $A(-1 ; 5)$ et qui sont tangents aux droites $3x + 4y = 35$ et $4x + 3y + 14 = 0$.

§ 3.3 Tangentes à un cercle:

Remarque initiale : On sera souvent confronté au problème suivant:
Mener par un point P une tangente à un cercle Γ.

- Ce problème admet deux solutions si ....
- Ce problème admet une solution si ....
- Aucune solution si ....

Pour savoir dans quel cas on se trouve, on compare le rayon du cercle Γ et la distance entre le point P et le centre du cercle.

- **<u>Problème 1</u>** Trouver la tangente à un cercle Γ par un point T du cercle.

Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$ et $T(2\ ;\ -2)$

1ère démarche (analytique):

2ème démarche (vectorielle):

Exercice 3.20: Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle Γ , déterminer les équations des tangentes à Γ au point T dans les cas suivants:

- *1ère démarche (analytique):*
  a) $T(-1\ ;\ 2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 5$
  b) $T(-5\ ;\ 7)$ $(\Gamma) : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
- *2ème démarche (vectorielle):*
  c) $T(0\ ;\ 0)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 = 3x - 7y$
  d) $T(-1\ ;\ 2)$ $(\Gamma) : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$
- *démarche libre:*
  e) $T(2\ ;\ 3)$ $(\Gamma) : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$

- **Problème 2** Trouver les tangentes à un cercle Γ ayant une direction connue.

Trouver les tangentes à $(\Gamma) : (x + 1)^2 + y^2 = 4$ qui sont parallèles à $(d) : 3x + 4y = 2$

Exercice 3.21: **a)** Déterminer les équations des tangentes au cercle

$$x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6,$$

de direction parallèle à la droite $2x + y = 7$.

b) Déterminer les équations des tangentes au cercle

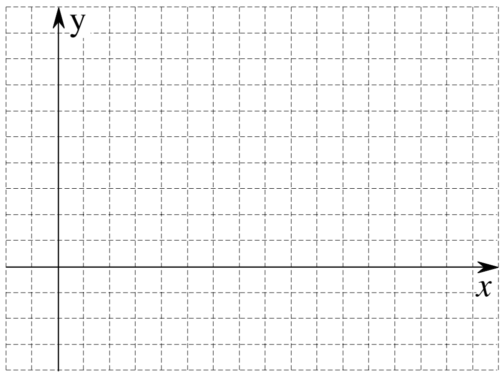
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0,$$

de direction perpendiculaire à la droite $x = 2y + 345$.

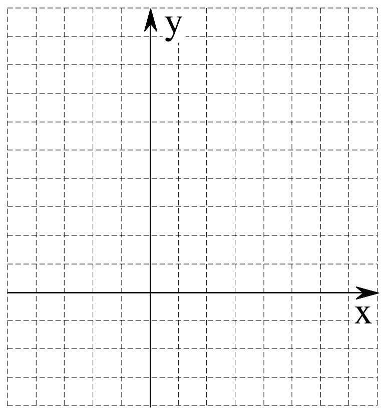
Exercice 3.22: On donne une droite $(g) : 3x + 4y - 34 = 0$ et un cercle $(\Gamma) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Vérifier que g est tangent à Γ et trouver les équations des 3 droites formant avec g un carré circonscrit à Γ.

- **Problème 3** Trouver les tangentes à un cercle Γ issues d'un point extérieur P.

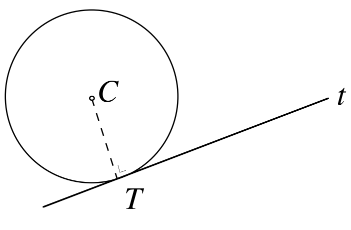
Résoudre ce problème si $(\Gamma) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ et $P(16 ; -3)$



Résoudre ce problème si (Γ) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ et $P(-4 ; 9)$



Remarque finale : Si l'on veut calculer les coordonnées des points de tangence connaissant les équations du cercle et des 2 tangentes, la méthode la plus rapide consiste à utiliser la perpendiculaire à la tangente, passant par le centre du cercle.



Exercice 3.23: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 5$ issues du point $A(5/3 ; -5/3)$.

Exercice 3.24: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2x$ issues du point $A(1 ; 6)$.
Calculer les coordonnées des points de tangence.

Exercice 3.25: Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ issues du point $A(6 ; 5)$.

Exercice 3.26: Prouver que les cercles d'équation $x^2 + y^2 = 49$ et $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ sont tangents en un point A à déterminer. Sont-ils tangents intérieurement ou extérieurement ?

Exercice 3.27: Calculer le sommet C du triangle ABC connaissant $A(-15 ; -5)$, $B(1 ; 7)$ et sachant que l'origine est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.