Chapitre 1: Calculs matriciels

1.1 Définitions de base

Introduction : *Une matrice est un tableau rectangulaire formé de nombres réels. Grâce aux matrices, on peut par exemple codifier dans un même objet toute l'information d'un système d'équations.*
Nous verrons dans ce chapitre comment effectuer des opérations sur ces matrices. Nous verrons ensuite comment l'écriture matricielle permet de mieux appréhender l'étude d'un système d'équations. Nous en présenterons trois méthodes de résolution :
- *la méthode de Gauss-Jordan ;*
- *en utilisant la matrice inverse ;*
- *la méthode de Cramer.*

Définitions :
- Une matrice $A = (a_{ij})$ de type $m \times n$ est un tableau rectangulaire comprenant m lignes et n colonnes formées de nombres réels.
- L'élément situé au croisement de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne est noté a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemples :
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est du type …….., a_{12} = …
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est du type …….., b_{23} = …

Notation : Par convention, les matrices se notent par des lettres majuscules en italique.

Exercice 1.1 : Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1 & 8 \\ 9 & 10 & 1/2 \end{pmatrix}$

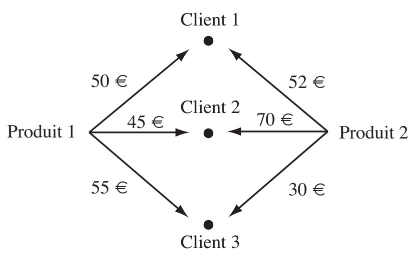
a) Préciser le type de la matrice B
b) Que valent b_{21}, b_{43} et b_{34} ?
c) Dans cette matrice, comment note-t-on le nombre 10 ? le nombre 8 ?

Exercice 1.2 : Écrire la matrice $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ où $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (2^i) \cdot (j)$

Définitions :

- Une matrice de type $n \times n$ est dite **carrée** d'ordre n
- Dans une matrice carrée, la diagonale formée par les éléments a_{ii} s'appelle la **diagonale principale**.
- Une matrice de type $1 \times n$ est appelée **matrice ligne**.
- Une matrice de type $n \times 1$ est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice carrée de type $n \times n$ est appelée **matrice identité** si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$. On la note I_n
- Une matrice de type $m \times n$ composée uniquement de zéro est appelée **matrice nulle**. On la note $0_{m \times n}$

Exercice 1.3 : Un fabricant de composants électroniques vend deux produits différents à trois clients. Les deux produits sont fabriqués dans des usines différentes. Les coûts de transports de chaque produit, pour chaque client, sont indiqués dans le schéma suivant :



a) Présenter les informations contenues dans le schéma sous la forme d'une matrice 2×3

b) Quelle information la deuxième ligne de la matrice contient-elle ?

c) Quelle information la troisième colonne de la matrice contient-elle ?

d) Quelle information a_{12} donne-t-il ?

Exercice 1.4 : Une entreprise compte 524 employés: 1 président, 3 vice-présidents, 20 cadres intermédiaires et 500 syndiqués. Leurs salaires annuels de base sont les suivants: le président reçoit 500'000 €, chaque vice-président, 200'000 €, chaque cadre intermédiaire, 100'000 € et chaque syndiqué, 40'000 €. En plus de leur salaire de base, les employés reçoivent une prime annuelle et des actions de la compagnie. La prime annuelle correspond à 10% du salaire de base, et chaque employé reçoit une action par tranche de 1'000 € de salaire. La valeur d'une action est de 5 €. Construisez la matrice de la rémunération des employés de l'entreprise de manière que les lignes représentent les catégories d'emploi et les colonnes, les différentes modalités de rémunération (dans l'ordre où ces données ont été présentées).

Exercice 1.5 : On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & \frac{3}{4} & 3 \end{pmatrix}$$

a) Donner le type des 4 premières matrices.

b) Si possible, donner la valeur de chacun des éléments suivants : a_{53} ; a_{35} ; b_{23} ; b_{11} ; c_{22} ; d_{12} ; e_{31} ; e_{13} ; h_{16}

c) Lesquelles des matrices sont :
des matrices carrées ? Des matrices lignes ?
Des matrices colonnes ? Des matrices identités.

Exercice 1.6 : Au cours du dernier mois, trois revendeurs de service interurbain se sont livré une concurrence féroce. Ces trois entreprises détiennent la totalité du marché. L'entreprise 1 a conservé 80% de sa clientèle, mais en a perdu 10% au profit de l'entreprise 2. L'entreprise 2 a retenu 75% de sa clientèle, mais en a perdu 5% au profit de l'entreprise 3. Enfin, l'entreprise 3 détient toujours 90% de sa clientèle, mais elle en a perdu 5% au profit de l'entreprise 2. La matrice de transition $T = (t_{ij})_{3\times 3}$, qui représente les mouvements de la clientèle, est définie par

$$t_{ij} = \text{part de la clientèle de } j \text{ qui passe à } i$$

Construisez la matrice de transition du marché de l'interurbain.

1.2 Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire

Définition : Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices de même type, leur somme $A + B$ est la matrice de même type obtenue en additionnant les tableaux élément par élément :

$$A + B = (c_{ij}) \text{ , avec } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

Définition : Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λA désigne la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par le nombre λ:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Exemple : $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$

Exercice 1.7 : **a)** Calculer, si possible, $A + B$ puis $B + A$. Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Calculer, si possible, $\frac{1}{2}(A + B)$ puis $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.
Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 8 & -9 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calculer, si possible, $2A + 3B$. Que constatez-vous ?

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 3 \\ 1/2 & -2/5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : On a alors les propriétés suivantes

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-1)A = 0_{m\times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

pour A, B et C des matrices de type $m \times n$ et λ, μ des réels quelconques.

La vérification de ces propriétés est aisée et laissée en exercice.

Exercice 1.8 : Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 2. Démontrer les propriétés **1**, **5** et **6** ci-dessus.

1.3 Rappels (??) Symbole de sommation.

Notation :

- Σ est la lettre majuscule *sigma* de l'alphabet grec, qui correspond à S, la première lettre du mot « somme ».
- L'expression $\sum_{i=1}^{n} a_i$ signifie « effectuer la somme des a_i en laissant i prendre les valeurs entières de 1 jusqu'à n ».
- La notation Σ est couramment utilisée en mathématique pour abréger l'écriture d'une somme de termes.

Exemples :

a) Compléter : $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = \sum$ ....

b) Compléter : $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 98 + 100 = \sum$ ....

c) Développer : $\sum_{i=4}^{9} (2i + 1)$ ....

d) La somme des éléments de la deuxième colonne d'une matrice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ s'écrit ....

e) alors que la somme des éléments de la troisième ligne s'écrit

....

Exercice 1.9 : **a)** Développer l'expression : $\sum_{i=4}^{7} i^2 + 1$.

b) Écrire 3 + 5 + 7 + ... + 35 au moyen de la notation Σ.

c) Exprimer la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ au moyen de la notation Σ.

1.4 Produit de deux matrices

Définition : • Le produit de deux matrices A et B est défini si le nbre de colonnes de A est égal au nbre de lignes de B.

• Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type $m \times n$ et
$B = (b_{ij})$ est une matrice de type $n \times p$ alors

le produit $AB = (c_{ij})$ est la matrice de type $m \times p$ définie par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & [c_{ij}] & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [a_{i1}] & \cdots & [a_{ik}] & \cdots & [a_{in}] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots & [b_{1j}] & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & [b_{kj}] & \cdots \\ & \cdots & \\ \cdots & [b_{nj}] & \cdots \end{pmatrix}$$

$$C_{m\times p} \quad = \quad A_{m\times n} \quad \cdot \quad B_{n\times p}$$

Exemples : Calculer

• $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

• $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$

• $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

Exercice 1.10 : Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Effectuez si possible les opérations suivantes. Si une opération n’est pas définie, donnez-en la raison.

a) BD **b)** $FE - 2A$ **c)** A^2 **d)** E^2
e) $(3) + GH$ **f)** I_3E **g)** CI_3 **h)** AEF

Exercice 1.11 : **a)** Comparer $A(BC)$ avec $(AB)C$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Comparer $A(B + C)$ avec $AB + AC$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer AI_n puis I_nA.

$$A = (a_{ij}) \text{ de type } m \times n \quad \text{et} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes

1. $A(BC) = (AB)C$ avec $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$ et $C_{p\times q}$

2. $AI_n = I_mA = A$ avec $A_{m\times n}$ et les matrices identités I_n et I_m

3. $A(B + C) = AB + AC$ avec $A_{m\times n}$ et $B_{n\times p}$, $C_{n\times p}$.

4. $(A + B)\,C = AC + BC$ si $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ et $C_{n\times p}$.

La vérification de ces propriétés est aisée et laissée en exercice.

Exercice 1.12 : Trouver la matrice X qui vérifie $2X + 3(A + B) = CD$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.13 : Un auteur de manuels scolaires a écrit un livre d'algèbre, un livre de calcul et un livre de statistiques, codés respectivement 1, 2 et 3. Au début de l'année, les deux entrepôts de l'éditeur renferment 10’000 exemplaires des livres de cet auteur, dont 3’000 copies du manuel de calcul et 1’000 copies du manuel de statistiques. Le premier des deux entrepôts contient 4’000 exemplaires des ouvrages de l'auteur, dont 1’000 copies du manuel d'algèbre et 2’000 copies du manuel de calcul.

a) Écrivez la matrice A de l'inventaire des ouvrages de l'auteur dans les deux entrepôts de l'éditeur. Les éléments de la matrice doivent respecter l'ordre utilisé dans le tableau suivant.

Inventaire des livres de l’auteur

	Algèbre (1)	Calcul (2)	Statistique (3)
Entrepôt 1			
Entrepôt 2			

b) L'éditeur prévoit de vendre au cours de l'année 30% des exemplaires de chaque ouvrage stockés dans chacun des deux entrepôts. Si les prévisions de l'éditeur se réalisent, quelle opération matricielle sur A permet de dresser l'inventaire à la fin de l'année?

c) Si les prévisions de l'éditeur se réalisent, quelle sera la matrice d'inventaire à la fin de l'année ?

d) Quelle matrice V donne la prévision du nombre d'exemplaires de chaque ouvrage vendus pour chaque entrepôt ?

L’éditeur vend les manuels d'algèbre 20 € l'unité, les manuels de calcul 25 € l'unité et les manuels de statistiques 30 € l'unité.

e) Écrivez la matrice des prix $P = (p_{ij})_{3\times 1}$.

f) Comment doit-on interpréter la matrice $R = VP$?

g) Que vaut la matrice R ?

Exercice 1.14 : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer AB
b) Quel étrange résultat obtenez-vous ?

Exercice 1.15 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculer AB puis BA
b) Quel étrange résultat obtenez-vous ?

Mise en garde :

- Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. *Il faudra en être attentif lors de la résolution d'équations matricielles.*
- Le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif. *Les manipulations algébriques de matrices seront délicates.*

Exercice 1.16 : Déterminer 2 matrices carrées A et B d'ordre 2 tels que

a) $AB = BA$ **b)** $AB = -BA$

Exercice 1.17 : Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Exercice 1.18 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.19 : Une diététicienne, qui travaille dans un hôpital, fait préparer trois types de déjeuners pour répondre aux différents besoins alimentaires des patients. Chaque déjeuner contient deux aliments composés de protéines, de fibres et de matières grasses. Les quantités (en grammes) de chacune de ces composantes, par portion de 30 g d'un aliment, sont données par la matrice *A*.

$$\begin{array}{cc} \text{Aliment 1} & \text{Aliment 2} & \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 13 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Protéines} \\ \text{Fibres} \\ \text{Gras} \end{array}$$

Chaque déjeuner contient au total 30 g des deux aliments, dans les proportions indiquées par la matrice B.

$$\begin{array}{ccc} \text{Déjeuner 1} & \text{Déjeuner 2} & \text{Déjeuner 3} \end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Aliment 1} \\ \text{Aliment 2} \end{array}$$

a) Interprétez la valeur de a_{21} dans le contexte donné. N'oubliez pas d'indiquer les unités de mesure dans votre réponse.

b) Interprétez la valeur de b_{13} dans le contexte donné. N'oubliez pas d'indiquer les unités de mesure dans votre réponse.

c) Que représente la deuxième colonne de la matrice *A ?*

d) Pouvez-vous interpréter le produit matriciel *BA* ?
Si oui, calculez ce produit et donnez-en le sens.

e) Pouvez-vous interpréter le produit matriciel *AB* ?
Si oui, calculez ce produit et donnez-en le sens.

1.5 Inverse d'une matrice

Définition : Soit *A* est une matrice carrée d'ordre *n*. S'il existe une matrice *B* telle que :

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A,$$

alors *B* est appelée **la matrice inverse de *A*** *(codée A^{-1})*.

Exemple : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.20 : Retrouver, parmi les matrices proposées, celles qui sont inverses l'une de l'autre.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & -7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2/7 & -3/7\\ 1/7 & 2/7\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}-7 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 1\\ -8 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}-7 & 3 & -1\\ -8 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 1.21 : Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ n'admet pas de matrice inverse.

Théorème :

- Pour une matrice d'ordre 2, si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ avec $ad-bc\neq 0$,

  alors A est inversible et $\boxed{A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}}$.

- La condition $ad-bc\neq 0$ est nécessaire pour que l'inverse de la matrice A existe. Nous y reviendrons plus tard.

Exercice 1.22 : Montrer qu'effectivement, les 2 matrices proposées dans le théorème ci-dessus sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 1.23 : Calculer, si possible, les matrices inverses de :

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4\\ 1/3 & 1/2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -15\end{pmatrix}$$

1.6 Systèmes d'équations et matrices

Exemple d'introduction :

- Considérons le système d'équations $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

  Toute l'information du système est contenue dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ des coefficients de x et de y et dans la matrice des termes indépendants $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Notons encore $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Résoudre le système revient alors à résoudre l'équation

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

  Dans le cas présent, on peut montrer que la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  On obtient donc aisément la solution du système par

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  En effet :

Remarquons cependant que cette méthode de résolution ne s'applique que si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et si la matrice des coefficients est inversible.

Signalons encore que, même dans ce cas particulier, la méthode de résolution n'est pas très performante du point de vue numérique.

Exercice 1.24 : **a)** On considère le système d'équations $\begin{cases} 3x+2y=-15 \\ -4x+3y=37 \end{cases}$

- Écrire ce système sous la forme d'une équation matricielle.
- Calculer, si possible, la matrice inverse correspondante.
- En déduire la solution de ce système.

Effectuer de même avec les 2 systèmes suivants:

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y=3 \\ \frac{4}{3}x-\frac{3}{2}y=-23 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+2y=-15 \\ -6x-4y=30 \end{cases}$

Exercice 1.25 : On considère le système d'équations écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que la matrice suivante correspond à la matrice inverse de celle proposée.

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

b) En déduire les solutions de l'équation matricielle.

Définition : Un **système linéaire** de m équations à n inconnues à coefficients réels est un système d'équations du type

$$(I) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des nombres réels et les x_j les inconnues.

Démarche : Résoudre le système (I) consistera à résoudre l'équation matricielle $AX = B$ où

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = (x_i)_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = (b_i)_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

À ce système d'équations, nous associons la matrice suivante, appelée **matrice augmentée** du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Le paragraphe suivant décrit certaines opérations sur les lignes d'une matrice. Ces opérations effectuées sur les lignes d'une matrice associée à un système d'équations nous conduiront à une détermination plus facile de l'ensemble des solutions du système.

1.7 Échelonnement d'une matrice

Définitions :

- **Le pivot** d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne
- Une matrice A est dite **échelonnée** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

  1) Le pivot d'une ligne est toujours situé à droite du pivot de la ligne précédente.

  2) Toutes les lignes nulles de la matrice (c'est-à-dire constituée entièrement de zéro) sont situées sous les lignes qui comptent des éléments non nuls (donc un pivot).

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 2 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 3 \text{ est un pivot} \end{array} \end{array}$$

cette matrice n'est pas échelonnée

Définition :

- Une matrice A est dite **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si elle possède encore deux nouvelles conditions :

  1) Tous les pivots de la matrice valent 1.

  2) Dans toute colonne qui contient un pivot, tous les éléments autres que le pivot sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cette matrice est échelonnée réduite

Exercice 1.26 : Parmi toutes les matrices suivantes, lesquelles sont échelonnées, lesquelles sont échelonnées réduites ?

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&2\\0&0&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ C=\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$D=\left(\begin{array}{cccccc|c}0&1&2&3&2&7&4\\0&0&0&2&5&3&6\\0&0&0&0&4&3&1\\0&0&0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right),\ E=\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\end{pmatrix}.$$

Définition : Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

(1) Permutation de 2 lignes.

(2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.

(3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Théorème : Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AX = B$

Preuve : Effectuons le parallèle entre les 3 opérations élémentaires sur les matrices et la résolution du système correspondant.
Pour visualiser mieux ceci, prenons comme exemple le système suivant ainsi que sa matrice augmentée correspondante :

$$\begin{cases}2x+y-z=1\\x+y+z=6\\-x-y+z=0\end{cases}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&1&1&6\\-1&-1&1&0\end{array}\right)$$

(1) Permutation de 2 lignes.

Il est clair qu'on peut permuter la première et deuxième lignes du système d'équations sans changer l'ensemble solution puisque celui-ci ne dépend nullement de l'ordre des équations. Ainsi,

$$\begin{cases}2x+y-z=1\\x+y+z=6\\-x-y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}x+y+z=6\\2x+y-z=1\\-x-y+z=0\end{cases}$$

sont des **systèmes d'équations équivalents,** car ils admettent le même ensemble solution. Matriciellement, ce résultat fournit l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&1\\1&1&1&6\\-1&-1&1&0\end{array}\right)\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&1&-1&1\\-1&-1&1&0\end{array}\right)$$

(2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.

Si on multiplie une (ou plusieurs) ligne du nouveau système, on ne change pas non plus l'ensemble solution, puisque toute opération effectuée des 2 côtés d'une équation ne modifie en rien la solution

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

(3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre.

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire de 2 équations d'un système. Ceci ne modifie pas l'ensemble de solutions du système

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Définition : Appliquer une transformation élémentaire aux lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par une matrice que l'on appelle **matrice élémentaire**.

Exemple : On considère la première opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_1 tel que :

$$E_1 \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 1.27 : On considère la deuxième opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to 2L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_2 tel que :

$$E_2 \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 1.28 : On considère la troisième opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_3 tel que :

$$E_3 \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Exercice 1.29 : On considère l'opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \; L_i \to L_i + \alpha L_j$$

Déterminer la matrice élémentaire E correspondante.

En résumé :

(1) Permuter les lignes i et j d'une matrice A est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice élémentaire E_1

$$E_1 = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} & & & i & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \mathbf{0} \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
\mathbf{0} & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

(2) Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par le nombre α est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_2

$$E_2 = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & \mathbf{0} \\
 & \ddots & & & \\
 & & \alpha & & \\
 & & & \ddots & \\
\mathbf{0} & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

(3) Ajouter α fois la ligne j à la ligne i de A revient à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_3

$$E_3 = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \mathbf{0} \\
 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & \\
 & & \alpha & \ddots & & \\
\mathbf{0} & & & & 1 & \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Théorème :

- Toute matrice se transforme en une matrice échelonnée par une suite d'opérations élémentaires.

Preuve : *Nous accepterons ce résultat sans une preuve formelle et utilisons-le dans l'exemple suivant :*

Exemple : Échelonnons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On transforme successivement *A* en *A'* de la manière suivante :

$$A \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -4 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

On a d'abord permuté les deux premières lignes de *A*. On a ensuite soustrait la première ligne de la dernière, et enfin on a soustrait deux fois la deuxième ligne de la troisième.

Exercice 1.30 :

a) Déterminer les 3 matrices E_1, E_2 et E_3 qui ont permis d'effectuer l'échelonnement précédent ($A \to A'$).

b) Déterminer la matrice X tel que $X \cdot A = A'$

Définition : On appelle **rang** d'une matrice *A* le nombre de lignes non identiquement nulles de la matrice échelonnée associée à *A*.

- On peut démontrer que le rang d'une matrice *A* est indépendant de l'échelonnement effectué. Nous admettrons ce fait.

Exemple : **1)** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1 car :

2) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Exercice 1.31 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad = bc$.

Montrer que son rang est inférieur ou égal à 1

Théorème : On considère A une matrice carrée d'ordre n. Alors

$$\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

1.8 Résolution de système par la méthode du pivot (méthode Gauss-Jordan)

Exemple : L'exemple suivant illustre la méthode du pivot lors de la résolution d'un système d'équations linéaires.

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

À l'aide d'opérations élémentaires de lignes, nous échelonnerons la matrice augmentée de ce système.

Johann Carl Friedrich Gauss
Mathématicien allemand
(1777 - 1855)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftrightarrow L_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) L_1 \to -L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & -5 \end{array}\right) L_3 \to -\tfrac{1}{20} L_3$$

Wilhelm Jordan
géodésien allemand
(1842 – 1899)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 - 6L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

Cette dernière matrice nous fournit donc la solution **S = {(-1 ; 1/2 ; 1/4)}**

Exercice 1.32 : Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot

a) $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \\ x_1+4x_2+3x_3=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1+3x_2=3 \\ x_1-2x_2=5 \\ 3x_1+2x_2=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=-4 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3-3x_4=-9 \end{cases}$

Exercice 1.33 : Résoudre **simultanément** les systèmes $A \cdot X = B_1$, $A \cdot X = B_2$ et $A \cdot X = B_3$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } B_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.9 Détermination de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot.

Introduction : La méthode du pivot sert également à trouver l'inverse de toute matrice carrée A d'ordre n. Dans ce cas, on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $(A \mid I_n)$ à $(I_n \mid C)$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice C qui est l'inverse de la matrice A. Observons ceci sur un exemple :

Exemple : Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \to L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -20 & 1 & -5 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to -1/20 L_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 - 6L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & -4/10 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/2 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{array}\right)$$

Ainsi donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & -2/5 \\ 3/10 & -1/2 & -1/10 \\ -1/20 & 1/4 & 7/20 \end{pmatrix}$

Question : Mais pourquoi ça marche ??

Exercice 1.34 : Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode du pivot

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.35 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Résoudre l'équation $A \cdot X = B$ par la méthode du pivot.
b) Calculer A^{-1}, puis calculer $A^{-1} \cdot B$. Que constatez-vous ?

1.10 Déterminant d'une matrice.

Introduction : À chaque matrice carrée A est associé un nombre appelé le **déterminant de A**, et désigné par $|A|$. Il ne faudrait pas confondre cette notation avec le symbole indiquant la valeur absolue d'un nombre réel. Pour éviter tout malentendu, on utilise parfois l'expression « det A» à la place de $|A|$. Nous définirons det A en commençant par le cas où A est d'ordre 1, puis en augmentant l'ordre de 1 à la fois. Comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, ces définitions surgissent tout naturellement lors de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Définitions :

- Si A est une matrice carrée **d'ordre 1**, $A = (a_{11})$, nous définirons

$$|A| = a_{11}$$

- Si A est une matrice carrée **d'ordre 2**, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, nous définirons :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exemple : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$

Exercice 1.36 : Vérifier les identités suivantes en développant chaque déterminant

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix}$

Pour faciliter le calcul de déterminants de matrices carrées d'ordre $n > 1$, nous introduisons la terminologie suivante.

Définition : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n > 1$.

La **sous-matrice** A_{ij} de A, est une nouvelle matrice, d'ordre $n - 1$, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple :

Matrice	Sous-matrice
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	$A_{23} =$

Pour la matrice ci-dessus, il y a huit autres sous-matrices : A_{12}, A_{13}, A_{21},… qui peuvent être obtenus de la même façon.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, calculer $|A_{32}|$.

Exercice 1.37 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, calculer

a) $|A_{12}|$ **b)** $|A_{23}|$

c) $a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}|$

d) $-a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{22} \cdot |A_{22}| - a_{32} \cdot |A_{32}|$

Définition : Si A est une matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, nous définirons :

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot |A_{1j}| =$$

Remarques :

- Si nous développons A_{11}, A_{12}, A_{13} et en réorganisant les termes, nous obtenons la formule suivante :

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

- Le procédé défini ci-dessus est appelé *développement de* $|A|$ *suivant les éléments de la première ligne*. En effectuant les calculs, nous montrerons en exercice que $|A|$ *peut être développé de la même façon en utilisant n'importe quelle ligne ou colonne*.

- Il y a un moyen de se rappeler du signe $(-1)^{i+j}$ associé à la sous-matrice A_{ij} en mémorisant le tableau de signes ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Exemple : Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -2 & -7 & 5\end{pmatrix}$, calculer $|A|$ de deux manières différentes.

Exercice 1.38 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a) $A=(2)$

b) $A=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 5\\ -6 & 3 & -1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}-5 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 7\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}-2 & 5{,}5 & 8\\ -0{,}3 & 8{,}5 & 7\\ 4{,}9 & 6{,}7 & 11\end{pmatrix}$

Exercice 1.39 : Montrer que le développement du déterminant d'une matrice d'ordre 3 suivant la 3$^{\text{ème}}$ ligne ou suivant la 2$^{\text{ème}}$ colonne nous fournit la même expression.

Formaliser ces 2 calculs à l'aide de $\sum_{\cdots}^{\cdots}\cdots$

La règle de Sarrus : La règle de Sarrus est un *procédé visuel*, qui permet de retenir la formule du calcul des déterminants d'ordre 3.

Calculer $\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 5\\ -6 & 3 & -1\end{vmatrix}$.

Exercice 1.40 : Appliquer la règle de Sarrus pour calculer $\begin{vmatrix}-5 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 7\\ 2 & 0 & 6\end{vmatrix}$

La définition suivante du déterminant d'une matrice d'ordre quelconque n est calquée sur celle utilisée pour le déterminant d'une matrice d'ordre 3.

Définition : **Le déterminant $|A|$ d'une matrice *A* d'ordre *n*** est le développement suivant les éléments de la première ligne :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \left|A_{1j}\right| =$$

Remarques :

- Nous pourrions également démontrer que le calcul du déterminant ne dépend pas du choix de la ligne ou de la colonne selon laquelle il est développé.
- Le tableau de signes ci-dessous permet de visualiser les "$(-1)^{i+j}$"

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- Le choix de la ligne ou de la colonne avant de se lancer dans le calcul doit être dicté par la présence d'un maximum de zéro comme le montre l'exemple ci-dessous :

Exemple : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Exercice 1.41 : Calculer le déterminant des matrices suivantes :

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 4 & -7 & -3 & 13 \\ -17 & -0{,}8 & 5 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}2 & 10 & -4 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.42 : Écrire les déterminants suivants sous la forme $a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z$ (combinaison linéaire des x, y et z)

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 0 & -6 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix}$

Exercice 1.43 : Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Montrer que $|A|=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ [1]

Exercice 1.44 : Démontrer l'affirmation suivante :

Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice carrée A sont nuls, alors $|A| = 0$.

Théorème : Si A est une matrice carrée, alors A est inversible $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.

[1] $\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$ (produit des a_{ii} pour i = 1 jusqu'à n)

1.11 La règle de Cramer

Introduction : Les déterminants interviennent dans l'étude des solutions de systèmes d'équations linéaires. Par exemple, prenons deux équations linéaires à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = k_2 \end{cases}$$

où au moins un coefficient non nul apparaît dans chaque équation. Nous pouvons supposer que $a_{11} \neq 0$, car sinon $a_{12} \neq 0$ et nous pourrions alors considérer y comme la première inconnue à la place de x.

Nous allons utiliser les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin d'en obtenir une équivalente admettant $a_{21} = 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right) \quad L_2 \to L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$$

$$\sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ & & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \end{array}\right) \quad L_2 \to \ldots\ \ldots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}k_2 - a_{21}k_1) \end{array}\right)$$

Donc le système donné est équivalent à :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}k_2 - a_{21}k_1 \end{cases}$$

qui peut également s'écrire :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = k_1 \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix} \end{cases}.$$

Si $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, nous pouvons résoudre la seconde équation par rapport à y, ce qui donne :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

La valeur de x correspondante peut-être trouvée en substituant y dans la 1ère équation, ce qui conduit à :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \text{ (cf. exercice 46)}$$

Gabriel Cramer (1704-1752)
mathématicien suisse

Cela démontre que, *si le déterminant de la matrice des coefficients d'un système de deux équations à deux inconnues n'est pas nul, le système a une solution unique.* Les deux dernières formules donnant x et y en tant que quotients de déterminants constituent la **règle de Cramer** pour deux inconnues.

Il existe un moyen simple pour se souvenir de la règle de Cramer :

Soit $D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients du système ;

- D_x s'obtiendra en remplaçant dans D les coefficients a_{11}, a_{21}, liés à l'inconnue x par les nombres k_1, k_2.
- D_y est obtenue à partir de D en remplaçant les coefficients a_{12}, a_{22}, liés à l'inconnue y par les nombres k_1, k_2.

$$D_x = \begin{pmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad D_y = \begin{pmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{12} & k_2 \end{pmatrix}$$

Règle de Cramer :
(pour deux inconnues)

Si $|D| \neq 0$, la solution (x ; y) du système linéaire est donnée par les formules suivantes :

$$\boxed{x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad , \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}}$$

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

Exercice 1.45 : Utiliser la règle de Cramer, lorsqu'elle est applicable, pour résoudre les systèmes:

a) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-2y=8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+5y=16 \\ 3x-7y=24 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -6x+9y=12 \end{cases}$

Exercice 1.46 : Lors de la résolution du système $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=k_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=k_2 \end{cases}$, nous avons montré que $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. Vérifier que $x=\dfrac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

La règle de Cramer peut être étendue aux systèmes de n équations linéaires à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où la i[ème] équation est de la forme $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = k_i$.

Pour résoudre un tel système, posons D la matrice des coefficients et posons D_{x_j} la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de x_j dans D par les nombres $k_1, \ldots, k_n$ qui apparaissent dans la colonne à droite du signe égal dans le système.
Si $|D| \neq 0$, le système a la solution unique suivante.

Règle de Cramer : (forme généralisée)

$$\boxed{x_1=\frac{|D_{x_1}|}{|D|},\quad x_2=\frac{|D_{x_2}|}{|D|},\quad \ldots\ ,\quad x_n=\frac{|D_{x_n}|}{|D|}}$$

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x-2z=3 \\ -y+3z=1 \\ 2x+5z=0 \end{cases}$

Exercice 1.47 : Utiliser la règle de Cramer, lorsqu'elle est applicable, pour résoudre les systèmes:

a) $\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=6 \\ x+3y-2z=13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+2y-z=-7 \\ x-2y+2z=0 \\ 3y+z=17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+3z-w=-3 \\ 3x+2y-z+w=13 \\ x-3y+z-2w=-4 \\ -x+y+4z+3w=0 \end{cases}$