Chapitre 3: Applications linéaires

3.1 Introduction et définitions

Introduction : Une application linéaire est une application entre espaces vectoriels qui préserve l'addition des vecteurs et la multiplication par des nombres réels.
Dans ce chapitre nous étudions les propriétés d'une application linéaire et en particulier sa représentation matricielle dans des bases fixées. On vérifiera que le rang de cette matrice est égal à la dimension de l'espace image. La correspondance entre application linéaire et matrice s'avérera très utile pour l'étude du rang ou de l'inversibilité d'une matrice.

Les applications linéaires sont très importantes en géométrie. Les rotations, homothéties, symétries et projections peuvent être considérées comme des composées de translations et d'applications linéaires.

Les applications linéaires vous seront utiles pour l'étude des fonctions de plusieurs variables.

Toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'approxime, en un point a, par sa tangente, à laquelle on peut associer l'application linéaire qui à x fait correspondre $f'(a)\cdot x$; de manière similaire, toute fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ peut s'approximer à l'aide de sa différentielle qui est une application linéaire.

Définition : Soit V et W deux espaces vectoriels.
Une **application** $T: V \to W$ est dite **linéaire** si pour tout $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a:

a) $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$
b) $T(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha T(\boldsymbol{u})$

Remarques : **1.** Les deux propriétés exprimant qu'une application entre espaces vectoriels est linéaire peuvent se remplacer par la seule propriété:

$$T(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha T(\boldsymbol{u}) + \beta T(\boldsymbol{v}) \text{ pour } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Si T est linéaire, on a :
- $T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ou plutôt $T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$
- $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\boldsymbol{v}_i)$ car :

Exercice 3.1 : Justifier les 2 propriétés de la 2ème remarque ci-dessus.

Abus d'écriture: Soit $\boldsymbol{v} = (x\,;y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on fait agir une application linéaire T. On se permettra d'écrire alors $T(x\,;y)$ en lieu et place de $T(\boldsymbol{v})$ ou $T\big((x\,;y)\big)$.

Exemples: **1)** L'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(x\,;y) = 2x + 3y$ est linéaire.

2) Les applications T_1 et $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes ne sont pas linéaires.

$$T_1(x\,;y) = x^2 + y \quad ; \quad T_2(x\,;y) = x + y + 1$$

Exemples: **3)** Une rotation d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous expliciterons cette application linéaire plus loin.

4) La symétrie par rapport à l'axe des x est une application linéaire $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $S(x ; y) = (x ; -y)$.

5) La projection sur la droite des x parallèlement à l'axe des y est une application linéaire P de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$P(x ; y) = (x ; 0).$$

Exemples développés: **6)** Montrer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 - x_2 ; 5x_1)$ est une application linéaire.

7) Montrer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x ; y) = (x + 1 ; y)$ n'est pas une application linéaire.

Exercice 3.2 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 + x_2 ; x_1)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x_1 ; x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$
c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : T(x_1 ; x_2 ; x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y) = (x + 1 ; 2y ; x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 ; \sin(x_2))$

Exercice 3.3 : Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires.
Montrer que $f + g$ est une application linéaire de E vers F.

Exercice 3.4 : Les applications T, de $\mathcal{D}([a ; b])$ vers $\mathcal{F}([a ; b])$, définie de la façon suivante, sont-elles linéaires ?

a) $T(f) = 2f$ **b)** $T(f) = f'$
c) $T(f) = 2f' - 3f$ **d)** $T(f) = f' - f^2$

Exercice 3.5 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire vérifiant :
$T(3 ; 2 ; 1) = (5 ; 4 ; 0)$ et $T(5 ; 4 ; 0) = (3 ; 2 ; 1)$.

a) Exprimer le vecteur $(1 ; 2 ; -3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $(3 ; 2 ; 1)$ et $(5 ; 4 ; 0)$
b) En déduire $T(1 ; 2 ; -3)$ *en utilisant les propriétés d'application linéaire de T*

Exercice 3.6 : Soient $T : V \to W$ une application linéaire et $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ des vecteurs de V tels que $T(\boldsymbol{v}_1), \ldots, T(\boldsymbol{v}_n)$ soient linéairement indépendants dans W. Montrer que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants dans V.

Exemple important: Soit A une matrice de type $m \times n$.
Notons $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par $L_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$.
Alors, l'application L_A est une application linéaire, car

Les exemples 1, 4 et 5 ci-dessus sont en fait de ce type et associés respectivement aux matrices

Exemple important: **1)** L'application $L(x\,;y) = 2x + 3y$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4) L'application $S(x\,;y) = (x\,;-y)$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

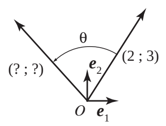
5) L'application $P(x\,;y) = (x\,;0)$ est associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons comment ***toute application linéaire*** *entre espaces vectoriels de dimensions finies* ***peut être représentée par une matrice****.*

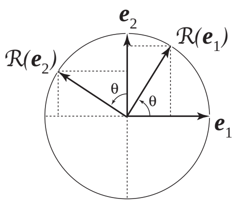
3.2 Matrice associée à une application linéaire

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: Commençons par un exemple **important**. On considère le vecteur $\boldsymbol{v} = (2 ; 3)$. Déterminer l'image de ce vecteur par une rotation de $\frac{5\pi}{12}$ (+75°) autour de l'origine *O*.



Soit $(\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère la transformation $\mathcal{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ correspondant à la rotation d'angle θ autour de l'origine. Déterminons l'image des vecteurs de base par $\mathcal{R}$:

$\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = (\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_2$. On définit le <u>1er vecteur colonne</u> : $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$



$\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = (-\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_1 + (\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_2$, On définit le <u>2ème vecteur colonne</u> : $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

On réunit les 2 vecteurs colonnes en une matrice sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Cette matrice représentera la transformation linéaire $\mathcal{R}$.

Pour s'en convaincre, recalculons les images des vecteurs de base :

$\boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0)$ alors $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ ce qui correspond bien à $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_1) = (\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_1 + (\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1)$ alors $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ce qui correspond bien à $\mathcal{R}(\boldsymbol{e}_2) = (-\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_1 + (\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_2$

Appliquons maintenant cette matrice au vecteur $\boldsymbol{v}$ et à l'angle $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \cos(5\pi/12) & -\sin(5\pi/12) \\ \sin(5\pi/12) & \cos(5\pi/12) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(5\pi/12) - 3\sin(5\pi/12) \\ 2\sin(5\pi/12) + 3\cos(5\pi/12) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{R}(2 ; 3) \cong (-2{,}38 ; 2{,}71)$$

et l'application $\mathcal{R}$ s'exprimera de façon plus générale par

$$\mathcal{R}(x ; y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{v} = (x ; y)$$

Après les exemples et exercices qui suivent, nous reprendrons cette démarche plus généralement.

Exemple : Déterminer la matrice A de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $T(x ; y ; z) = (4x - 2y - z ; 3x - 4y + z)$ relativement aux bases canoniques ordonnées de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.7 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par :

$$T(x ; y ; z) = (4x + 2z ; 2y - z ; 5z - x ; 2y)$$

Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$

Exercice 3.8 : Déterminer les représentations matricielles, dans les bases canoniques, des applications linéaires suivantes :

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2 ; x_3) \mapsto (x_1 + x_2 ; 2x_3)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 ; 0)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1 ; x_2) = (2x_1 ; x_2)$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y) = (x ; y ; x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x ; y ; z) = (x + 2y + 3z ; 4x + 5y + 6z ; 7x + 8y + 9z)$$

Exercice 3.9 :
a) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique ?
b) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est décrit au départ dans la base canonique et à l'arrivée dans la base $\big((1 ; 1), (-1 ; 1)\big)$?
c) Quelle est la représentation matricielle de l'application identité de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\mathbb{R}^2$ est décrit au départ dans la base $\big((1 ; 1), (-1 ;1)\big)$ et à l'arrivée dans la base canonique ?

Exercice 3.10 : Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$T(x\,;y\,;z) = (x + y\,;y - z)$$

a) Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$

b) Quelle est la représentation matricielle de T relativement aux bases suivantes :

Dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1\,;1\,;0), (0\,;1\,;0), (1\,;0\,;1)\big)$
Dans $\mathbb{R}^2$: $\big((0\,;1), (1\,;0)\big)$

Démarche générale : Soit V et W deux EV de dimension n et p respectivement.
Soit $e = (\boldsymbol{e}_1\,;\dots;\boldsymbol{e}_n)$ une base ordonnée de V et $f = (\boldsymbol{f}_1\,;\dots;\boldsymbol{f}_p)$ une base ordonnée de W.

Soit encore $T : V \to W$ une application linéaire.

Il existe des nombres définis de manière unique a_{ij} avec $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\dots;p\}$ tels que

$$T(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{21}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{31}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \dots + a_{p1}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{j1}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

$$T(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{22}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{32}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \dots + a_{p2}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{j2}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

$$\dots\dots$$

$$T(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\cdot \boldsymbol{f}_1 + a_{2n}\cdot \boldsymbol{f}_2 + a_{3n}\cdot \boldsymbol{f}_3 + \dots + a_{pn}\cdot \boldsymbol{f}_p = \sum_{j=1}^{p} a_{jn}\cdot \boldsymbol{f}_j$$

Ainsi donc, on peut représenter cette transformation sous une forme matricielle relativement aux bases choisies dans V et W à l'aide de la matrice $(p\times n)$

$$_f A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

$j^{\text{ème}}$ colonne:
coefficients de $T(\boldsymbol{e}_j)$
dans la base $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_p)$

Définition : La matrice $_f A_e$ de type $p\times n$ s'appelle **la matrice de T relativement aux bases e et f**.

La proposition suivante montre que cette matrice permet de reconstruire l'application linéaire T pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ de V.

Proposition: Pour $\boldsymbol{v}$ fixé dans V, la matrice colonne des composantes de $T(\boldsymbol{v})$ dans la base f (noté $T(\boldsymbol{v})_f$) est le produit de la matrice ${}_fA_e$ par la matrice colonne des composantes de $\boldsymbol{v}$ dans la base e.

$$T(\boldsymbol{v})_f = {}_fA_e \cdot \boldsymbol{v}_e$$

Preuve :

Calculons $T(\boldsymbol{v})_f$ avec $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$.

$$T(\boldsymbol{v})_f = \left(T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right)\right)_f = x_1 T(\boldsymbol{e}_1)_f + x_2 T(\boldsymbol{e}_2)_f + \ldots + x_n T(\boldsymbol{e}_n)_f$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}_fA_e \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

D’où la formule annoncée : $T(\boldsymbol{v})_f = {}_fA_e \cdot \boldsymbol{v}_e$

Exercice 3.11 : Soit V un espace vectoriel de dimension 4 muni de la base $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2 ; \boldsymbol{e}_3 ; \boldsymbol{e}_4)$. On définit une transformation linéaire L de V en posant :

$$L(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ L(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ L(\boldsymbol{e}_3) = 3\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4,\ L(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_4.$$

a) Donner la représentation matricielle de L dans la base e

b) Donner la représentation matricielle de L dans la base e au départ et e' à l’arrivée où $e' = (L(\boldsymbol{e}_1), L(\boldsymbol{e}_2), L(\boldsymbol{e}_3), L(\boldsymbol{e}_4))$.

Exercice 3.12 : Soit $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3 : L(x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ; x_5) = (x_1 ; x_2 - x_5 ; 3x_4)$

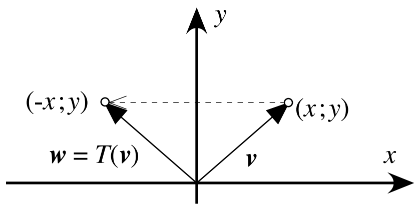
a) Donner la représentation matricielle de L lorsque l’on choisit pour $\mathbb{R}^5$ la base canonique ordonnée e et pour $\mathbb{R}^3$ la base f définie par:

$$f = \big((1 ; 1 ; 0), (0 ; 1 ; 0),(0 ; 1 ; 1)\big)$$

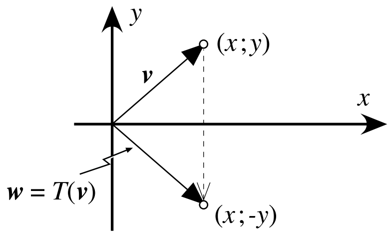
b) Calculer $L(1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5)$ *exprimé dans la base f.*

3.3 Quelques applications *T* usuelles de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

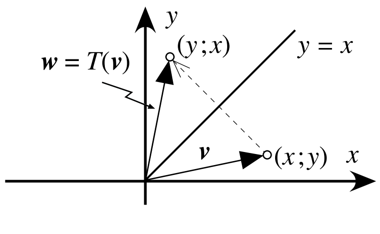
Symétrie orthogonale relativement à l'axe *Oy* :



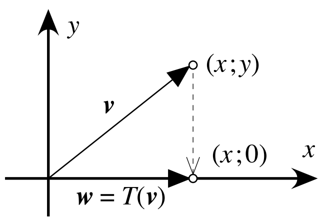
Symétrie orthogonale relativement à l'axe *0x* :



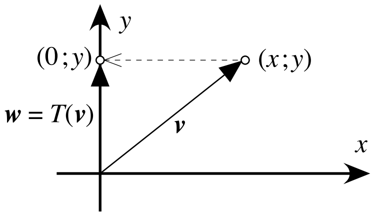
Symétrie orthogonale relativement à droite $y = x$:



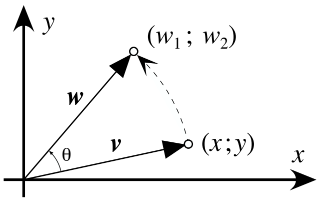
Projection orthogonale sur l'axe *0x* :



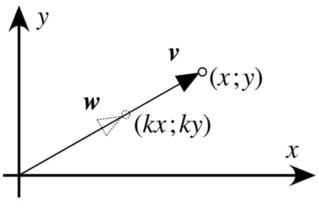
Projection orthogonale sur l'axe *0y* :



Rotation d'un angle θ autour de l'origine :

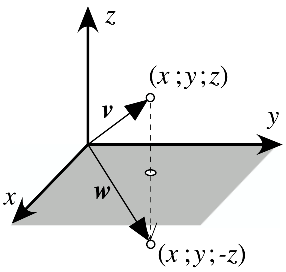


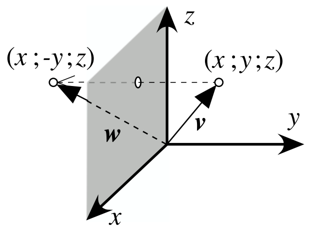
Homothétie de rapport *k* centrée à l'origine :



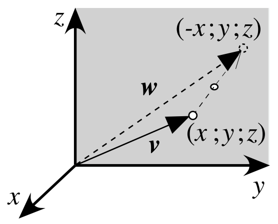
3.4 Quelques applications *T* usuelles de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Symétrie orthogonale relativement au plan *0xy* :

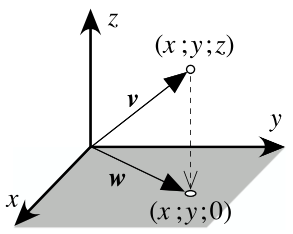




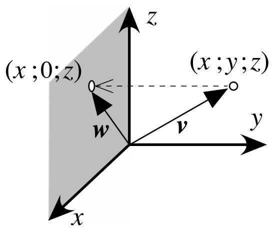
Symétrie orthogonale relativement au plan *0xz* :



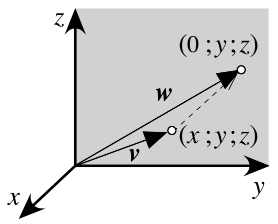
Symétrie orthogonale relativement au plan *0yz* :



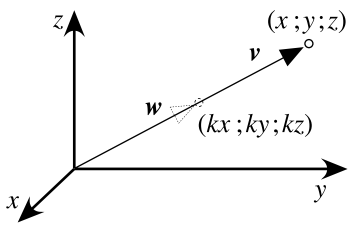
Projection orthogonale sur le plan *0xy* :



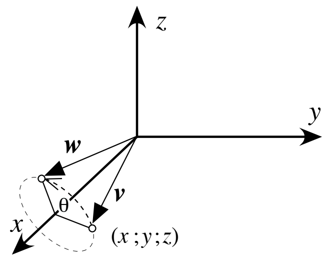
Projection orthogonale sur le plan *0xz* :



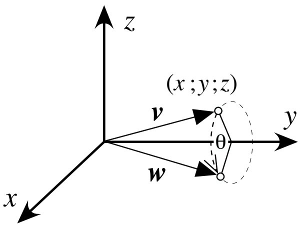
Projection orthogonale sur le plan *0yz* :



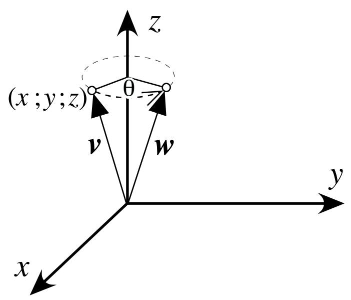
Homothétie de rapport k centrée à l'origine :



Rotation autour de l'axe $0x$ d'amplitude θ :



Rotation autour de l'axe $0y$ d'amplitude θ :



Rotation autour de l'axe $0z$ d'amplitude θ :

Remarque importante : *Dans les exercices qui suivent, si aucune précision n'est donnée concernant les bases utilisées, nous considérerons par convention les bases canoniques des espaces vectoriels.*

Exercice 3.13 : Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de la symétrie orthogonale relativement au plan $x + y = 0$

Exercice 3.14 : Construire les matrices des applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) la rotation d'un angle θ autour de l'origine dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

b) la projection sur la droite $y = 2x$ parallèlement à la droite $y = 3x$

Exemple Déterminer la matrice de la projection parallèle au vecteur $\boldsymbol{v} = (5\,;4\,;3)$ sur le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

Exercice 3.15 : Construire la matrice de la projection sur le plan $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Exercice 3.16 : L'endomorphisme[1] $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{v} \to A\boldsymbol{v}$ consiste en la projection de l'espace $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $z = 0$ suivant la direction $(1 ; 1 ; 2)$. Déterminer la matrice A.

Exercice 3.17 :
a) Déterminer la matrice M de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.
b) Que vaut Det(M) ? Est-ce une surprise ?

Exercice 3.18 :
a) Déterminer dans la base canonique ordonnée la matrice M de la symétrie orthogonale relativement au plan $2x - 3y + z = 0$.
b) Que vaut M^2 ?

Exercice 3.19 : Soit l'application :

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{P}_2 \\ & f & \mapsto & f' + f \end{array}$$

a) Montrer que L est une application linéaire.
b) Déterminer la matrice M de l'application linéaire L relativement à la base de $\mathbb{P}_2$:

$$\mathcal{B} = \left(x^2 ; x ; 1\right)$$

c) Montrer que la matrice M est inversible et calculer son inverse.
d) Résoudre l'équation $f' + f = x^2 - 2x - 3$.
(il s'agit donc de trouver la fonction $f \in \mathbb{P}_2$ qui satisfait à cette équation)

Exercice 3.20 : Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} L: \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (\boldsymbol{i} - 1) \cdot z \end{array}$$

a) Déterminer la matrice M de l'application linéaire L relativement à la base canonique de $\mathbb{C}$.
b) Déterminer M^3.
c) Résoudre l'équation $(\boldsymbol{i} - 1)^3 \cdot z = 1$

[1] Une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même s'appelle un **endomorphisme**.

3.4 Composition de 2 applications linéaires :

Définition : Soient V, W et R trois espaces vectoriels, $T : V \to W$ et $L : W \to R$ deux applications linéaires. **La composition** des deux applications T et L est l'application de V dans R définie par

$$(L \circ T)(\boldsymbol{v}) = L(T(\boldsymbol{v}))$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "L\circ T"'] & W \arrow[r, "L"] & R \end{tikzcd}$$

On montrera en exercice que l'application $L \circ T$ que nous venons de définir est bien une application linéaire.

Exemple : En considérant une base e dans V, f dans W et g dans R, nous allons nous intéresser à la matrice de $L \circ T$ en fonction des matrices de T et L. Observons ceci sur un exemple :

Soit ${}_fA_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ la matrice de T et ${}_gB_f = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ la matrice de L.

Soit $\boldsymbol{v} = (x\,;y)$ un vecteur de V. Alors

$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$L(T(\boldsymbol{v})) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix} =$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$L(T(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

On voit donc apparaître dans cet exemple la multiplication des 2 matrices $B \cdot A$. Ce résultat se généralise dans le théorème suivant :

Théorème : Soient V, W et R trois espaces vectoriels, $T : V \to W$ et $L : W \to R$ deux applications linéaires et des bases ordonnées e de V, f de W et g de R. Alors la matrice ${}_g(L \circ T)_e$ représentant $L \circ T$ à travers les bases e et g est le produit des matrices ${}_gL_f$ et ${}_fT_e$ représentant L à travers les bases f et g et T à travers les bases e et f.

$$ {}_g(L \circ T)_e = {}_gL_f \cdot {}_fT_e $$

Preuve à compléter : Soit $\boldsymbol{v} \in V$. On a

$$\begin{aligned}
{}_g(L \circ T)_e \cdot \boldsymbol{v}_e &= (L \circ T)(\boldsymbol{v})_{\ldots\ldots} \\
&= L(\underbrace{\ldots(\boldsymbol{v})}_{\boldsymbol{w}})_g \\
&= L(\boldsymbol{w})_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot \boldsymbol{w}_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot T(\ldots)_{\ldots\ldots} \\
&= {}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot \left({}_{\ldots\ldots}T_{\ldots\ldots} \cdot \boldsymbol{v}_{\ldots\ldots} \right) \\
&= \left({}_{\ldots\ldots}L_{\ldots\ldots} \cdot {}_{\ldots\ldots}T_{\ldots\ldots} \right) \cdot \boldsymbol{v}_e
\end{aligned}$$

Rappel :
Si $\underset{b.o.e}{T : V} \to \underset{b.o.f}{W}$

$$T(\boldsymbol{v})_f = {}_fT_e \cdot \boldsymbol{v}_e$$

On a donc bien ${}_g(L \circ T)_e \cdot \boldsymbol{v}_e = \left({}_gL_f \cdot {}_fT_e \right) \cdot \boldsymbol{v}_e$ pour tout $\boldsymbol{v} \in V$, ce qui montre bien le résultat voulu.

Exercice 3.21 : Montrer que 1'application $L \circ T$ est bien une application linéaire.

Exercice 3.22 : De $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on considère les deux transformations linéaires[2] suivantes:

T : rotation d'un angle de 30° autour de l'origine.
U : homothétie de rapport -1/2 centrée à l'origine.

En considérant la base canonique
a) déterminer les matrices de $U \circ T$ et $T \circ U$
b) que constatez-vous ?
c) ce résultat se généralise-t-il pour toute transformation géométrique ?

Exercice 3.23 : Démontrer les fameuses formules d'addition d'angles

(cf. page 30 formulaire)

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Exercice 3.24 : Déterminer dans la base canonique la matrice de rotation d'un angle de $\pi/3$ autour d'un axe perpendiculaire au plan α d'équation $y = z$

[2] On appelle **transformation linéaire** toute application linéaire représentant une transformation géométrique (rotation, projection, symétrie, …)

3.5 Matrice de changement de base :

Définition : Si V est un espace vectoriel muni de deux bases $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n)$ et $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}'_n)$ alors considérons l'application linéaire de V dans V (donc endomorphisme) où la base e est transformée en la base e'.

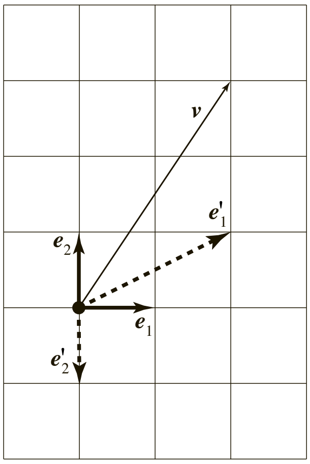
On sait que les colonnes de la matrice de cette transformation seront formées des vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ exprimés dans la base $\boldsymbol{e}'_i$.

Cette matrice s'appelle **matrice du changement de base** et sera notée : ${}_{e'}Id_e$

Exemple : Soit $V = \mathbb{R}^2$ muni des 2 bases suivantes :

$$e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2) \text{ où } \boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0) \text{ et } \boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1)$$
$$e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \boldsymbol{e}'_2) \text{ où } \boldsymbol{e}'_1 = (2 ; 1) \text{ et } \boldsymbol{e}'_2 = (0 ; -1)$$

- Calculer ${}_{e'}Id_e$ (exprimer chaque $\boldsymbol{e}_i$ dans la base e')



- Calculer ${}_{e}Id_{e'}$ (exprimer chaque $\boldsymbol{e}'_i$ dans la base e)

- Exprimer $v_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base e'

- Exprimer $v_{e'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans la base e

- Les 2 transformations ${}_{e'}Id_e$, ${}_{e}Id_{e'}$ étant réciproques, il n'est pas surprenant que le produit des 2 matrices donne la matrice identité ou de manière plus pratique, une des matrices s'obtient comme l'inverse de l'autre.

Théorème : Soit V un espace vectoriel et $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}_n)$ et $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{e}'_n)$ deux bases de V.
Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de V : • exprimé dans la base e, on le notera $\boldsymbol{v}_e$,
• exprimé dans la base e', on le notera $\boldsymbol{v}_{e'}$.

Alors,

1) $\boldsymbol{v}_{e'} = {}_{e'}Id_e \cdot v_e$

2) ${}_{e'}Id_e$ est inversible et $({}_{e'}Id_e)^{-1} = {}_{e}Id_{e'}$

Preuve:

Exercice 3.25 : $V = \mathbb{R}^2$ muni des 3 bases suivantes :

- la base canonique $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2)$,
- $e' = (\boldsymbol{e}'_1 ; \boldsymbol{e}'_2)$ où $\boldsymbol{e}'_1 = (1 ; -2)$ et $\boldsymbol{e}'_2 = (2 ; 1)$
- $e'' = (\boldsymbol{e}''_1 ; \boldsymbol{e}''_2)$ où $\boldsymbol{e}''_1 = (2 ; -1)$ et $\boldsymbol{e}''_2 = (1 ; 1)$

On considère les 3 vecteurs suivants : $\boldsymbol{v}_e = (2 ; 3)$, $\boldsymbol{w}_{e'} = (1 ; 1)$ et $\boldsymbol{u}_{e''} = (1 ; 1)$.

a) représenter la situation sur une figure d'étude,
b) déterminer ${}_{e}Id_{e'}$, ${}_{e''}Id_e$ et avec un minimum de calcul ${}_{e''}Id_{e'}$,
c) déterminer $\boldsymbol{v}_{e'}$, $\boldsymbol{v}_{e''}$, $\boldsymbol{w}_e$, $\boldsymbol{u}_{e'}$.

3.6 Représentations d'une application linéaire dans des bases différentes :

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Supposons V muni de deux bases ordonnées e et e' et W muni de deux bases ordonnées f et f'.

Connaissant la matrice ${}_fT_e$ de cette transformation exprimée dans les bases e et f, on sera amené à devoir déterminer la matrice ${}_{f'}T_{e'}$ de cette même transformation par rapport aux bases e' et f'. On a la formule :

$$\boxed{{}_{f'}T_{e'} = {}_{f'}Id_f \cdot {}_fT_e \cdot {}_eId_{e'}}$$

On peut résumer ce qui précède par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V_{\text{base } e} \arrow[r, "{}_fT_e"] \arrow[d, shift right, "{}_{e'}Id_e"'] & W_{\text{base } f} \arrow[d, shift right, "{}_{f'}Id_f"'] \\
V_{\text{base } e'} \arrow[r, "{}_{f'}T_{e'}"'] \arrow[u, shift right, "{}_eId_{e'}"'] & W_{\text{base } f'} \arrow[u, shift right, "{}_fId_{f'}"']
\end{tikzcd}$$

Exemple : Soit l'application linéaire $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(x\,;y\,;z) = (3x + y + 2z\,;x + 2z\,;y)$$

On définit deux bases ordonnées:
- e la base canonique,
- $f = (\boldsymbol{f}_1\,;\boldsymbol{f}_2\,;\boldsymbol{f}_3)$ avec

$$\boldsymbol{f}_1 = (1\,;0\,;0)\ ,\quad \boldsymbol{f}_2 = (1\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad \boldsymbol{f}_3 = (1\,;1\,;1).$$

Déterminer les deux matrices ${}_eT_e$ puis ${}_fT_f$.

Exercice 3.26 : **a)** Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par

$$T(x ; y) = (2x + 3y ; -y)$$

Déterminer la matrice ${}_eA_e$ de T relativement à la base canonique e puis ${}_fA_f$ relativement à la base $f = ((1 ; 1) ; (-1 ; 2))$

b) Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par

$$T(x ; y) = (y ; -5x + 13y ; -7x + 16y)$$

Déterminer ${}_fA_e$ la matrice de T relativement aux bases :

$$e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ et } f = (\boldsymbol{f}_1 ; \boldsymbol{f}_2 ; \boldsymbol{f}_3) \text{ de } \mathbb{R}^3$$

où : $\boldsymbol{e}_1 = (3 ; 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (5 ; 2)$;
$\boldsymbol{f}_1 = (1 ; 0 ; -1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1 ; 2 ; 2)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0 ; 1 ; 2)$.

1ère démarche: exprimer l'image des vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ dans la base $\boldsymbol{f}_i$.
2ème démarche: commencer par déterminer la matrice de T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.27 : Soit L une application linéaire d'un espace vectoriel V dans lui-même. Supposons que dans la base $e = (\boldsymbol{e}_1 ; \boldsymbol{e}_2 ; \boldsymbol{e}_3)$ l'application L se représente par la matrice

$${}_eL_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

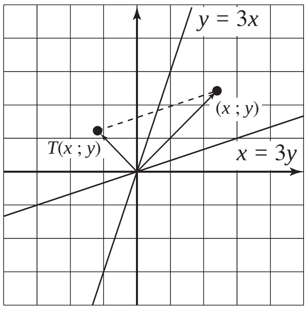
Notons $u = (\boldsymbol{u}_1 ; \boldsymbol{u}_2 ; \boldsymbol{u}_3)$ une nouvelle base avec:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$$

Construire la matrice ${}_uL_u$.

Exercice 3.28 : Soit T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie de la manière suivante : l'image d'un point est le symétrique de ce point par rapport à la droite $y = 3x$, parallèlement à la droite $x = 3y$.

(cf. figure ci-contre)



Nous utiliserons 2 démarches afin de déterminer la matrice de cette application par rapport à la base canonique.

a) 1ère démarche géométrique :

Géométriquement, déterminer l'image des deux vecteurs de base (1 ; 0) et (0 ; 1). En déduire la matrice demandée.

b) 2ème démarche avec un changement de base :

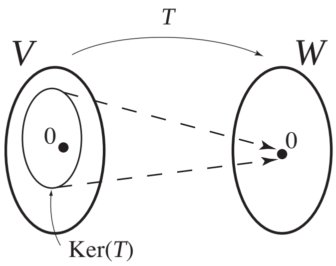
Choisir 2 vecteurs $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ tel que $T(\boldsymbol{u}_1)$ et $T(\boldsymbol{u}_2)$ soient faciles à déterminer. Exprimer la matrice représentant ${}_uT_u$ à travers la base $(u_1 ; u_2)$. À l'aide des matrices de changement de base, déterminer ${}_eT_e$.

Exercice 3.29 : Soit T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie de la manière suivante : l'image d'un point est obtenue par une rotation de ce point d'un angle de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe de rotation $x = y$.

Déterminer la matrice de cette application par rapport à la base canonique.

3.7 Ker(T), Im(T), injective, surjective et bijective :

Définition : Soit $T : V \to W$ une application linéaire.

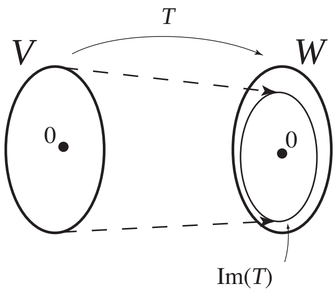


On appelle **noyau de *T***, noté **Ker(*T*)**, l'ensemble des $\boldsymbol{v} \in V$ tels que $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ (cf. figure ci-contre).

Donc par définition

$$\boxed{\operatorname{Ker}(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}}$$

Définition : Soit $T : V \to W$ une application linéaire.



On appelle **image de *T***, noté **Im(*T*)**, l'ensemble des $\boldsymbol{w} \in W$ tels qu'il existe $\boldsymbol{v} \in V$ avec $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ (cf. figure ci-contre).

Donc par définition

$$\boxed{\operatorname{Im}(T) = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \exists \boldsymbol{v} \in V \text{ tel que } T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\}}$$

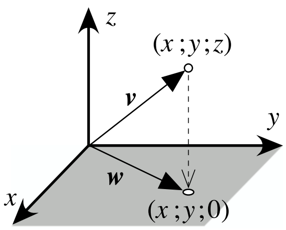
Remarques : Dans le cas des "fonctions classiques" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Ker(T) correspondrait aux zéros de la fonction f.
- Im(T) correspondrait à Im(f)

Exemple : **1)** Soit $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : P(x ; y ; z) = (x ; y ; 0)$, la projection sur le plan Oxy parallèlement à l'axe des z. L'application P étant une application linéaire :

Ker(P) =

Im(P) =



Colorier en 2 couleurs différentes Ker(P) et Im(P) sur la représentation ci-contre :

Déterminer la dimension de Ker(P) et d'Im(P)

Exemple : **2)** Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1 ; x_2 ; x_3) = (x_1 + x_2 ; 2x_1 + x_3)$
Déterminer Ker(T), en donner une base et sa dimension.

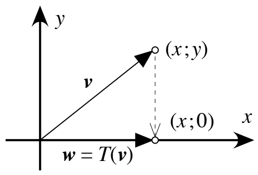
Théorème : Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Alors
- Ker(T) est un SEV de V.
- Im(T) est un SEV de W.

Exercice 3.30 : Démontrer le théorème précédent.

Exercice 3.31 : Pour chacune des transformations linéaires T suivantes :

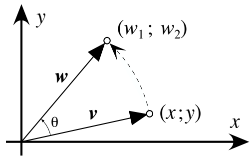
1) Colorier en 2 couleurs différentes Ker(T) et Im(T)
2) Expliciter Ker(T), Im(T)
3) Préciser les dimensions de Ker(T) et Im(T)
4) Que peut-on conjecturer sur dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) ?

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



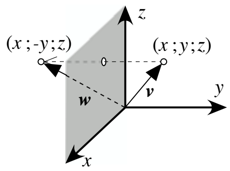
Projection orthogonale sur l'axe 0x

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



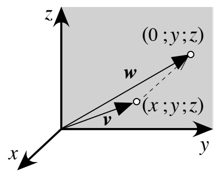
Rotation d'un angle θ autour de l'origine

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Symétrie orthogonale relativement au plan 0xz

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Projection orthogonale sur le plan 0yz

Exercice 3.32 : Pour chacune des applications linéaires T suivantes, calculer Ker(T), en donner une base et sa dimension.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2 ; x_3) \mapsto (x_1 + x_2 ; 2x_3)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1 ; x_2) \mapsto (x_1 ; 0)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x_1 ; x_2) = (2x_1 ; x_2)$
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y) = (x ; y ; x + y)$
e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : T(x ; y ; z) = (x + 2y + 3z ; 4x + 5y + 6z ; 7x + 8y + 9z)$

Définitions : Soit une application linéaire $T : V \to W$

- elle est dite **injective** si pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de V

$$\boxed{\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \;\Rightarrow\; T(\boldsymbol{u}) \neq T(\boldsymbol{v})}$$

  ou de façon équivalente : $\boxed{T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}}$

- elle est dite **surjective** si tous les vecteurs de W sont atteints :

$$\boxed{T(V) = W}$$

- elle est dite **bijective** (*one to one*) si elle est à la fois injective et surjective

Exercice 3.33 : **1)** Parmi les 4 applications linéaires proposées à l'exercice 3.31, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

2) Parmi les 5 applications linéaires proposées à l'exercice 3.32, lesquelles sont injectives, surjectives, bijectives ?

Exemple : **a)** Déterminer une base du noyau Ker(T) de la transformation linéaire de matrice A avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer une base de Im(T)

Pour répondre à la partie ***b)*** *de l'exemple, nous aurons besoin du théorème suivant :*

Théorème : Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie et si $T : V \to W$ est une application linéaire alors l'image par T d'une famille génératrice de V est une famille génératrice de Im(T).

Preuve :

Attention : Le théorème ne dit pas que l'image d'une base est une base. Par contre, **l'image d'une base est une famille génératrice**. Il restera à contrôler si elle est libre ou non.

Reprise de l'exemple : Déterminer une base de Im(T) de la transformation linéaire de matrice A avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.34 : Soit F une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

avec $A = \begin{pmatrix} -21 & -35 & -42 \\ 9 & 15 & 18 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

a) Donner une base de $\mathrm{Im}(F)$
b) Vérifier que $\mathrm{Im}(F) \subset \mathrm{Ker}(F)$
c) Sans calculer A^2, montrer que $A^2 = 0$

Exercice 3.35 : Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de définie par $F(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $F(1 ; 2 ; 3)$
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(F)$
c) Démontrer que $\mathrm{Im}(F) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\}$
d) Interpréter F géométriquement.

Exercice 3.36 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Notons L_A l'application linéaire associée : $L_A(\boldsymbol{v}) = A\cdot\boldsymbol{v}$

a) Déterminer le rang de cette matrice.
b) Décrire le noyau de A, donner une base, préciser la dimension
c) Même question pour l'image de A.

Théorème : Une application linéaire T est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$

Preuve :

Exercice 3.37 : Soit F une application linéaire représentée dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de k l'application F est-elle injective.

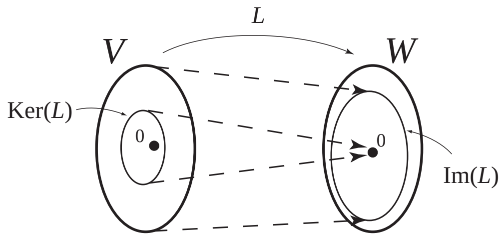
b) Soit $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k, le système $A{\cdot}\boldsymbol{v} = b$ n'admet-il aucune solution ?

c) Pour $k = 0$, trouver l'inverse de A et résoudre, grâce à cet inverse, le système $A{\cdot}\boldsymbol{v} = b$

3.8 Théorème du rang (ou théorème des dimensions):

Théorème des dimensions : Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie et si $L : V \to W$ est une application linéaire alors

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(L) + \dim \mathrm{Im}(L)$$



Avant d'en voir une preuve, utilisons ce résultat dans quelques exercices :

Exercice 3.38 :

a) Soit $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Im}(F)$. Que vaut $\dim \mathrm{Ker}(F)$?

b) Construire une application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$

c) Soit $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire injective. Que vaut $\dim \mathrm{Im}(R)$?

Exercice 3.39 : Soient $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$, et $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que

$T(\boldsymbol{v}_1) = (1 ; 0 ; 0)$, $T(\boldsymbol{v}_2) = (0 ; 1 ; 0)$ et $T(\boldsymbol{v}_3) = (0 ; 0 ; 1)$.

Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

Exercice 3.40 : La transformation linéaire T de matrice A est-elle injective ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

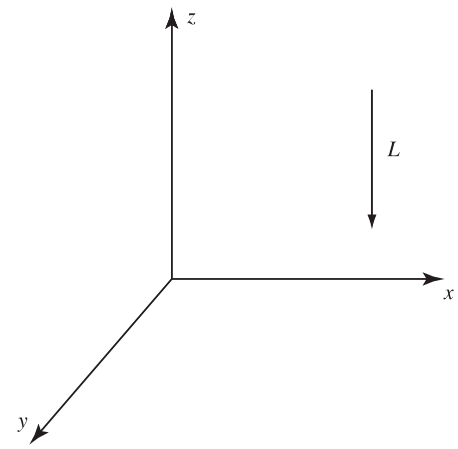
La preuve du théorème des dimensions $\dim V = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$

<u>*Preuve proprement dite :*</u>

- Prenons une base $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s)$ de $\operatorname{Ker}(L)$ supposé de dim s.
- Etendons cette base en une base $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s ; \boldsymbol{v}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}'_r)$ de V supposé de dim $r + s$
- En vertu du théorème page 82, $\operatorname{Im}(L)$ est engendré par les vecteur $L(\boldsymbol{v}_i)$ et les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_i)$, c'est-à-dire par les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_i)$ car $L(\boldsymbol{v}_i) = 0$.
- Les vecteurs $L(\boldsymbol{v}'_1)$, … , $L(\boldsymbol{v}'_r)$ forment donc une partie génératrice de $\operatorname{Im}(L)$. Montrons qu'ils en forment aussi une partie libre donc une base.
- En effet, si les scalaires α_i sont tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot L(\boldsymbol{v}'_i) = 0$ on aura $L\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i\right) = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i$ appartient à $\operatorname{Ker}(L)$. On pourra donc exprimer ce vecteur comme combinaison linéaire des $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s)$:
  $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \boldsymbol{v}_j$ ou encore $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$ et donc finalement $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \boldsymbol{v}'_i + \sum_{j=1}^{s} (-\beta_j) \cdot \boldsymbol{v}_j = 0$.
- Comme la suite $(\boldsymbol{v}_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}_s ; \boldsymbol{v}'_1 ; \ldots ; \boldsymbol{v}'_r)$ est une base (donc libre) tous les α_i et β_j sont nuls.
- Ainsi dim $\operatorname{Im}(L) = r$ mais on a dim $\operatorname{Ker}(L) = s$, dim $V = r + s$

Donc $\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)}$

<u>*Un exemple concret :*</u> $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
Projection orthogonale sur le plan 0xy :



Théorème : Soit $T: V \to W$ une application linéaire où V et W sont des espaces vectoriels de même dimension finie.
Alors, les affirmations sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$
(2) T est injective
(3) T est surjective
(4) T est bijective

Exercice 3.41 : Prouver le théorème précédent.

Définition : Soit A une matrice de type $m \times n$.
On appelle **transposée de *A***, la matrice notée A^T (de type $n \times m$) obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple : Déterminer la transposée de la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.42 : Calculer le rang des matrices suivantes puis de leur transposée:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Théorème : Soit A une matrice, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$

Sans preuve.

Corollaire : Soit $T : V \to W$ une application linéaire de définie par $T(\boldsymbol{v}) = A \cdot \boldsymbol{v}$
alors : $\boxed{\dim \mathrm{Im}(T) = \mathrm{rang}\, A}$.

Exercice 3.43 : Discuter le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.44 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

a) Donner la forme échelonnée réduite de A

b) Quel est le rang de A ?

c) Quelle est la dimension de l'image de l'application linéaire définie par A ?

d) Quelle est la dimension du noyau de cette application linéaire ?

e) Donner une base de ce noyau.

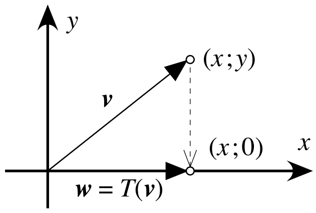
Exercice 3.45 : Pour chacune des 4 transformations linéaires T ci-dessous :

1) Déterminer la matrice A de cette transformation

2) Si possible, déterminer la matrice B de la transformation inverse. Si ce n'est pas possible, expliquez pourquoi.

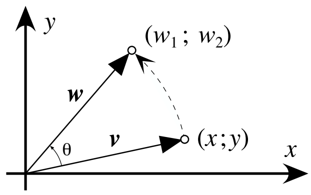
3) Que pouvez-vous affirmer au sujet de ces 2 matrices A et B ?

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



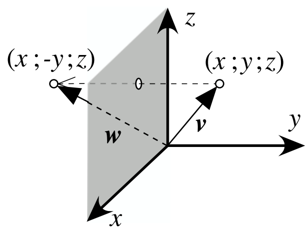
Projection orthogonale sur l'axe 0x

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



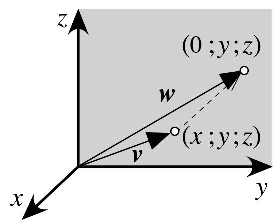
Rotation d'un angle θ autour de l'origine

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Symétrie orthogonale relativement au plan 0xz

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$



Projection orthogonale sur le plan 0yz

Théorème : Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors :

A est inversible $\Leftrightarrow$ L'application $L_A : \boldsymbol{v} \to A\cdot\boldsymbol{v}$ est bijective.
$\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Exercice 3.46 : Déterminer pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont inversibles et calculer ces inverses.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$