

Chapitre 4: Valeurs propres et vecteurs propres

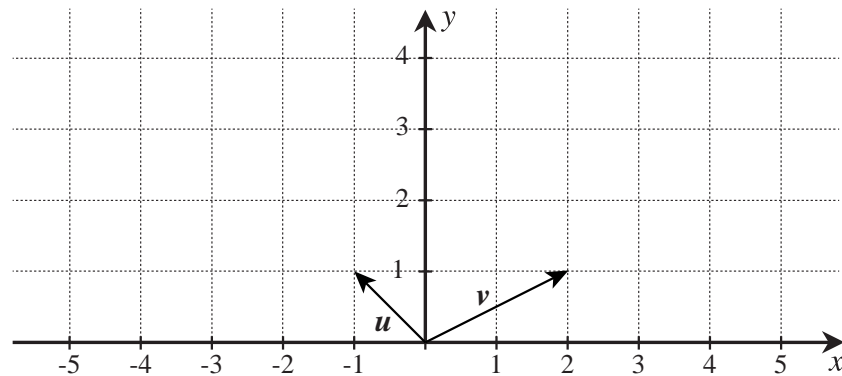
4.1 Introduction et définitions

Introduction : S'il est vrai qu'une transformation linéaire $v \mapsto Av$ peut faire bouger un vecteur dans des directions très variées, il arrive souvent que, sur certains vecteurs, l'effet de A soit extrêmement simple.

Observons ceci sur un exemple de \mathbb{R}^2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$, $u = (-1 ; 1)$ et $v = (2 ; 1)$.

a) Calculer puis construire ci-dessous Au , ainsi que Av .



b) Calculer $w = u + v$ puis Aw . Représenter le tout ci-dessus.

c) Que constate-t-on ?

Définition : Soit L une application linéaire d'un espace vectoriel V dans lui-même. Un vecteur v de V non nul est appelé **vecteur propre de L** s'il est **colinéaire** à son **image $L(v)$** , ce qui signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $L(v) = \lambda v$.

Ce nombre λ s'appelle **valeur propre associée** au vecteur propre.

Remarques : • On peut également proposer cette définition équivalente :

*Un nombre réel λ est appelé une **valeur propre** de L s'il existe un vecteur v non nul tel que $L(v) = \lambda v$. Ce vecteur v s'appelle **vecteur propre associé** à la valeur propre.*

- Si A est la représentation matricielle de l'application linéaire L , un vecteur propre (resp. valeur propre) de A sera par définition un vecteur propre (resp. valeur propre) de l'application linéaire L .

4.2 Notions intuitives sur les vecteurs propres et valeurs propres

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Montrer que le vecteur $v = (1 ; 0 ; 0)$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 2$.
- Montrer que le vecteur $w = (1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur propre dont on déterminera sa valeur propre λ associée
- Montrer que $\lambda = -1$ est une valeur propre dont on déterminera le vecteur propre associé.

Exercice 4.1 :

a) La valeur $\lambda = 2$ est-elle une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

b) Le vecteur $\mathbf{v} = (1 ; 4)$ est-il un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$?

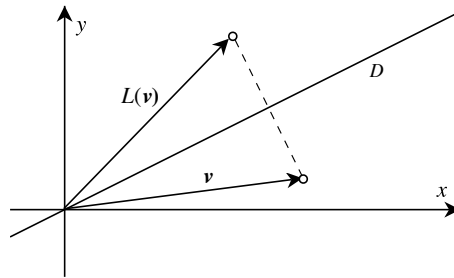
Si oui, déterminer la valeur propre λ associée.

c) La valeur propre $\lambda = 4$ est-elle une valeur propre de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Si oui, déterminer le ou les vecteurs propres associés.

Exemple : La symétrie L par rapport à une droite D passant par l'origine est une application linéaire.



a) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul situé sur D ?

b) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul perpendiculaire à D ?

En déduire 2 vecteurs propres, ainsi que leur valeur propre associée, de l'application L

Exercice 4.2 : La rotation \mathcal{R} d'angle θ autour de l'origine dans le plan est une application linéaire représentée dans les bases canoniques par la matrice :

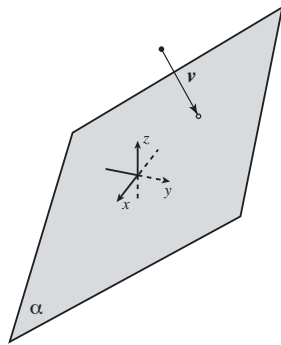
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Si θ n'est pas un multiple de π , montrer que \mathcal{R} n'admet aucun vecteur propre.
- Si $\theta = \pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de \mathcal{R} .
- Si $\theta = 2\pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de \mathcal{R} .

Exercice 4.3 : Démontrer les affirmations suivantes:

- Si \mathbf{v} est un vecteur propre de L de valeur propre λ et si α est un nombre réel non nul, alors $\alpha\mathbf{v}$ est aussi un vecteur propre de L de valeur propre λ .
- Si \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ et si $\mathbf{u} + \mathbf{v} \neq 0$, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ est un vecteur propre de L de valeur propre λ .
- Si \mathbf{u} et \mathbf{v} , linéairement indépendants, sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ , alors que peut-on affirmer au sujet du vecteur $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ pour tout α, β non nuls ?

Exemple : On considère dans l'espace \mathbb{R}^3 la projection \mathcal{P} sur un plan α passant par l'origine, parallèlement à un vecteur \mathbf{v} . L'application \mathcal{P} , ainsi définie, est une application linéaire.

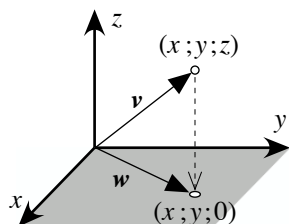


- Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs du plan α ?
- Que peut-on affirmer au sujet du vecteur \mathbf{v} définissant la direction de projection ?

En déduire 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'application L , et discuter des vecteurs propres associés.

Définition : Si λ est une valeur propre de l'application linéaire L , on note $V_\lambda = \dots$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = \dots$

Exemple : On considère la projection orthogonale sur le plan Oxy . Déterminer 2 valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.



Exercice 4.4 : Pour chaque transformation linéaire suivante, déterminer des valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.

Dans \mathbb{R}^2

- Symétrie orthogonale relativement à l'axe Oy .
- Projection orthogonale sur la droite $y = x$.

Dans \mathbb{R}^3

- Projection orthogonale sur le plan Oyz .
- Symétrie orthogonale relativement au plan Oxz .
- Projection orthogonale sur le plan $y = z$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire L_A .

Sachant que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A , déterminer une base associée de l'espace propre $V_{\lambda=2}$.

Exercice 4.5 : Déterminer l'espace propre associé à chaque valeur propre mentionnée.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 1$ puis $\lambda = 5$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -2$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 3$ puis $\lambda = 8$

Théorème : L'ensemble $\{v_1; \dots; v_r\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ d'une matrice carrée A d'ordre n est linéairement indépendant.

Sans preuve.

Exercice 4.6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$,

- En échelonnant la matrice augmentée adéquate, résoudre l'équation $A \cdot X = 0$
- Expliquer pourquoi cette équation admet "une" solution non triviale, c'est-à-dire différente du vecteur nul $X = 0$.
- Que peut-on affirmer au sujet de déterminant $\text{Det}(A)$?

Théorème : L'équation matricielle $Av = 0$ admet une solution non triviale

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \text{Det}(A) = 0 \end{array}$$

Justification :

Théorème :
Résoudre l'équation matricielle $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ \Leftrightarrow Résoudre l'équation matricielle $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Preuve : Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = \lambda v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = \lambda v_2 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Théorème : Un scalaire λ est une valeur propre d'une matrice carrée A d'ordre n si et seulement si λ satisfait à **l'équation caractéristique** $\det(A - \lambda I) = 0$

Preuve :

Exemple (début) : Déterminer l'équation caractéristique puis les valeurs propres de

l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3)

Exercice 4.7 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.8 : Montrer que l'endomorphisme h de \mathbb{R}^2 défini par

$$h((x ; y)) = (-y ; x)$$

n'admet aucune valeur propre.

Exercice 4.9 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

$$\mathbf{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (fin) : Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres

de l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.10 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'équation caractéristique A .
- En déduire les valeurs propres.
- Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
- En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.11 : On considère un endomorphisme défini par une matrice carrée d'ordre n . Justifier l'affirmation suivante :

Un tel endomorphisme admet au plus n valeurs propres différentes.

Exercice 4.12 : Déterminer les valeurs propres de la matrice triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat se généralise-t-il à toute matrice carrée d'ordre n ?

Exercice 4.13 : Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.14 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'équation caractéristique A .
- En déduire les valeurs propres.
- Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
- En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.15 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.16 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer ses valeurs propres.
- Déterminer leur espace propre associé.
- Quelle est la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.17 : On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer ses valeurs propres.
- Déterminer leur espace propre associé.
- Que devient la matrice de cet endomorphisme si l'on considère, non pas la base canonique, mais la base formée par les 3 vecteurs propres ?

Exercice 4.18 : On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 donné dans la base canonique e par la matrice :

$${}_e A_e = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'équation caractéristique de f .
- Donner les valeurs propres de f .
- Déterminer une base e' de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice associée à f est diagonale et vaut :

$${}_{e'} A_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les 2 matrices ${}_e Id_{e'}$ et ${}_{e'} Id_e$, tels que :

$${}_e A_e = {}_e Id_{e'} \cdot {}_{e'} A_{e'} \cdot {}_{e'} Id_e$$

- Calculer $({}_{e'} A_{e'})^n$ puis exprimer $({}_e A_e)^n$ en fonction de $({}_{e'} A_{e'})^n$.
- Calculer $({}_e A_e)^6$

Définition : Un endomorphisme est **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale.

Exercice 4.19 : On considère l'endomorphisme h de \mathbb{R}^3 donné, dans la base canonique e par la matrice :

$$H = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres associés.
- Diagonaliser H puis donner les matrices de passage et la relation qui lie ces matrices.
- Montrer que l'image de la base canonique e par cet endomorphisme est une base orthonormée.
- Caractériser géométriquement cet endomorphisme h .

Exercice 4.20 : On considère T la transformation géométrique suivante :

Symétrie orthogonale vectorielle de direction parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Déterminer les 2 valeurs propres de cette transformation
- Donner une matrice diagonale de T en précisant la base e' à considérer.
- Donner les matrices de passages permettant d'exprimer T dans la base canonique e .
- Donner la matrice de cette transformation par rapport à la base canonique.

