Éléments de réponses du chapitre 1:

Exercice 1.1 : **a)** 4×3 **b)** 0 ; 1/2 ; n'existe pas

c) b_{42} ; b_{33}

Exercice 1.2 : $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \\ 8 & -16 & 24 \end{pmatrix}$

Exercice 1.3 : **a)** $C=\begin{pmatrix} 50 & 45 & 55 \\ 52 & 70 & 30 \end{pmatrix}$

b) coûts de transport pour le produit 2

c) coûts totaux pour le client 3

d) coûts du produit 1 pour le client 2

Exercice 1.4 : $\begin{pmatrix} 500'000 & 50'000 & 2'500 \\ 200'000 & 20'000 & 1'000 \\ 100'000 & 10'000 & 500 \\ 40'000 & 4'000 & 200 \end{pmatrix}$

Exercice 1.5 : **a)** $4\times 5\ ;\ 3\times 3\ ;\ 2\times 2\ ;\ 2\times 3$

b) imp ; 10 ; 7 ; 1 ; 2 ; 0 ; 5 ; imp ; 7

c) *B*, *C* et *G* ; *F* et *G* ; *E* et *G* ; *G*

Exercice 1.6 : $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}$

Exercice 1.7 : **a)** $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}=B+A$ *; l'addition semble être commutative.*

b) $\frac{1}{2}(A+B)=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ *; ce calcul semble être distributif.*

c) Calcul impossible, car les matrices ne sont pas du même type.

Exercice 1.8 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.9 : **a)** 16 + 25 + 36 + 49 + 1 **b)** $\sum_{i=1}^{17}(2i+1)$ **c)** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Exercice 1.10 : **a)** $BD=I_2$ **b)** $FE-2A$ non défini

c) $A^2=\begin{pmatrix} 13 & -18 & 8 \\ 16 & 17 & -16 \\ 0 & 16 & 5 \end{pmatrix}$ **d)** E^2 non défini

e) $(3)+GH=(47)$ **f)** $I_3E=E$

g) $CI_3=C$ **h)** $AEF=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 257 \\ -3 & -6 & 29 \\ 53 & 106 & 201 \end{pmatrix}$

Exercice 1.11 : **a)** $A(BC)=\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 27 & -33 \end{pmatrix}=(AB)C$ *; la multiplication semble associative.*

b) $A(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & 4 & 14 \end{pmatrix}=AB+AC$ *; ce calcul semble distributif.*

c) $AI_n=A$ mais I_nA n'est pas calculable.

Exercice 1.12 : $X=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -11/2 & -23/2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.13 : **a)** $A=\begin{pmatrix} 1'000 & 2'000 & 1'000 \\ 5'000 & 1'000 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** Il s'agit de 0,7*A*

c) Matrice inventaire = $\begin{pmatrix} 700 & 1'400 & 700 \\ 3'500 & 700 & 0 \end{pmatrix}$

d) $V=0{,}3A=\begin{pmatrix} 300 & 600 & 300 \\ 1'500 & 300 & 0 \end{pmatrix}$ **e)** $P=\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$

f) *R* représente les revenus, par entrepôt, que l'éditeur prévoit tirer de la vente des livres au cours de l'année.

g) $R=\begin{pmatrix} 30'000 \\ 37'500 \end{pmatrix}$

Exercice 1.14 : **a)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) le produit de deux matrices non nulles peut être nul.

Exercice 1.15 : **a)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Exercice 1.16 : pas de solution proposée.

Exercice 1.17 : $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA$ *ce qui n'est pas vrai dans le cas général.*

Exercice 1.18 : Récurrence: 1ère étape : vérifiez la formule pour $n = 1$;

2ème étape : supposez la formule vraie pour A^n, et démontrez qu'elle reste vraie pour $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.19 : **a)** a_{21} représente la quantité de fibres alimentaires dans 30 g du premier aliment.

b) b_{13} représente la portion d'aliment 1 dans une portion de 30 g du déjeuner du type 3.

c) La deuxième colonne de la matrice A représente la quantité de protéines, de fibres alimentaires et de matières grasses dans 30 g du deuxième aliment.

d) Le produit matriciel BA n'a pas de sens.

e) Le produit matriciel AB donne les quantités de protéines (ligne 1), de fibres alimentaires (ligne 2) et de matières grasses (ligne 3) contenues dans une portion de 30 g de chacun des déjeuners représentés par une colonne de la matrice.

$$AB = \begin{pmatrix} 3,4 & 3,8 & 4,2 \\ 10,6 & 8,2 & 5,8 \\ 1,2 & 1,4 & 1,6 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.20 : A et C ; B et F ; D et G.

Exercice 1.21 : Supposer l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et trouver une contradiction.

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 1.22 : Il suffit de vérifier que $A \cdot A^{-1} = I_2 = A^{-1} \cdot A$

Exercice 1.23 : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3/2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ C est non inversible.

Exercice 1.24 : **a)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 37 \end{pmatrix}$; $\dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; S = {(-7 ; 3)}

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -23 \end{pmatrix}$; $\dfrac{1}{93}\begin{pmatrix} 90 & 36 \\ 80 & -30 \end{pmatrix}$; S = {(-6 ; 10)}

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 30 \end{pmatrix}$; non inversible ; S = {(x ; y) | $3x + 2y = -15$}

Exercice 1.25 : **a)** Il s'agit de montrer que le produit de ces 2 matrices donne I_3.

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 1.26 : A n'est pas échelonnée

B est échelonnée (non réduite)

C est échelonnée réduite

D est échelonnée (non réduite)

E n'est pas échelonnée

Exercice 1.27 : $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 1.28 : $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.29 :

$$E = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & \alpha & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 1.30 : **a)** $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

il serait judicieux de contrôler que $X \cdot A = A'$.

Exercice 1.31 : Et si vous échelonniez la matrice…

Exercice 1.32 : **a)** S = {(-2 ; 2 ; -1)} **b)** S = {(3 ; -1)}

c) S = {(1 ; -1 ; 2 ; -2)} **d)** S = $\varnothing$

e) S = {(3t – 25 ; -4t + 29 ; t ; 7) | $t \in \mathbb{R}$}

Exercice 1.33 : Échelonner puis réduire la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

et on obtient $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -18 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 1.34 : **a)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/2 & 3/4 & -5/4 \\ -5/2 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & 7 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ **d)** $D^{-1} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.35 : **a)** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 11 & -6 \\ -1 & -16 & 10 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot B = X$

Exercice 1.36 : sera vu individuellement à votre demande.

Exercice 1.37 : **a)** $|A_{12}| = 0$ **b)** $|A_{23}| = 34$

c) $a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}| = -3$

d) $-a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{22} \cdot |A_{22}| - a_{32} \cdot |A_{32}| = -3$ *(même réponse que le (c) ??)*

Exercice 1.38 : **a)** $|A| = 2$ **b)** $|A| = 2$ **c)** $|A| = -125$

d) $|A| = 48$ **e)** $|A| = -235{,}68$

Exercice 1.39 : $\sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j} \cdot |A_{3j}| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot |A_{i2}| =$ et vaut :

$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Exercice 1.40 : **a)** $\begin{vmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$

Exercice 1.41 : **a)** $|A| = -216$ **b)** $|A| = abcd$ **c)** $|A| = 10'739{,}92$

Exercice 1.42 : **a)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -31x - 20y + 7z$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 0 & -6 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 6x + 8y - 18z$

Exercice 1.43 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.44 : et si vous développiez le déterminant par rapport à cette ligne .

Exercice 1.45 : **a)** S = {(4 ; -2)} **b)** S = {(8 ; 0)} **c)** S = $\varnothing$ *(à résoudre à la main)*

Exercice 1.46 : sera vu ensemble à votre demande.

Exercice 1.47 : **a)** S = {(2 ; 3 ; -1)} **b)** S = {(-2 ; 4 ; 5)} **c)** $S_{(x;y;z;w)}$ = {(3 ; -1 ; -2 ; 4)}

Éléments de réponses Chapitre 2:

Exercice 2.1 : **a)** $M_{2\times 3}$ muni des opérations sur les matrices est bien un espace vectoriel, car il vérifie bien les 8 propriétés d'un E.V.

b) Ce résultat se généralise à toute matrice $M_{m\times n}$.

Exercice 2.2 : P_2 muni des opérations habituelles est bien un espace vectoriel, car il vérifie bien les 8 propriétés d'un E.V.

Exercice 2.3 : **a)** Non, car cet ensemble ne contient pas le vecteur nul et en particulier cet élément n'admet pas d'élément opposé.

b) Cet ensemble est bien un espace vectoriel, il vérifie les 8 propriétés.

Exercice 2.4 : L'addition étant définie de manière naturelle, elle vérifie les 4 premières propriétés d'un E.V.

La distributivité I est également vérifiée, par contre, la distributivité II n'est pas vérifiée. Par exemple :
$(1 + 2) \cdot (4 ; 3) = (12 ; 3)$ mais $1(4 ; 3) + 2(4 ; 3) = (12 ; 6)$

Exercice 2.5 : **a)** Ce n'est pas un espace vectoriel, car pour un vecteur donné de V, son opposé n'appartient pas à V. De plus, le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ n'appartient pas à V.

b) Il s'agit bien d'un espace vectoriel (droite vectorielle).

c) Ce n'est pas un espace vectoriel, car pour un vecteur donné de V, son opposé n'appartient pas à V. De plus, le vecteur nul $\boldsymbol{0}$ n'appartient pas à V.

d) Il s'agit bien d'un espace vectoriel (plan vectoriel).

Exercice 2.6 : Un corrigé peut être vu à votre demande.

Exercice 2.7 : On a $(4 ; 3 ; 2) = -11(1 ; 2 ; 3) + 20(1 ; 1 ; 2) - 5(1 ; -1 ; 1)$

Exercice 2.8 : **a)** Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(2 ; 1)$ forment une suite génératrice, car on a $(x ; y) = (-x + 2y)(1 ; 1) + (x - y)(2 ; 1)$.

b) Elle n'est pas génératrice, seuls les vecteurs du type $(k ; k)$ peuvent être engendrés ($k \in \mathbb{R}$).

c) Elle n'est pas génératrice, seuls les vecteurs du type $(k ; 2k)$ peuvent être engendrés ($k \in \mathbb{R}$).

d) Le même raisonnement qu'en **b)** montre qu'elle n'est pas génératrice.

e) Elle est génératrice, car tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des 2 derniers vecteurs proposés.

f) Elle est génératrice, car $(x ; y) = \left(\frac{-3x+4y}{7}\right)(3 ; 4) + \left(\frac{4x-3y}{7}\right)(4 ; 3)$.

Exercice 2.9 : **a)** N'est pas génératrice.
b) N'est pas génératrice.
c) N'est pas génératrice.
d) Est génératrice.
e) Est génératrice.
f) Est génératrice.

Exercice 2.10 : *A propos de l'exercice 8 :*

a) Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(2 ; 1)$ forment une suite libre, car la seule solution de l'équation $\alpha_1(1 ; 1) + \alpha_2(2 ; 1) = (0 ; 0)$ est $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

b) Les vecteurs $(1 ; 1)$ et $(3 ; 3)$ ne forment pas une suite libre, car:
$$-3(1 ; 1) + (3 ; 3) = (0 ; 0).$$

c) La partie $\{(1 ; 2)\}$ est libre, car $\alpha_1 = 0$ est l'unique solution de l'équation:
$$\alpha_1(1 ; 2) = (0 ; 0).$$

d) La partie $\{(0 ; 0), (2 ; 3)\}$ n'est pas libre, car $1(0 ; 0) + 0(2 ; 3) = (0 ; 0)$.

e) La partie $\{(1 ; 1), (0 ; 1), (1 ; 0)\}$ n'est pas libre, car:
$$(1 ; 1) - (0 ; 1) - (1 ; 0) = (0 ; 0).$$

f) La partie $\{(3 ; 4), (4 ; 3)\}$ est libre, car la seule solution de l'équation:
$$\alpha_1(3 ; 4) + \alpha_2(4 ; 3) = (0 ; 0) \text{ est } \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

À propos de l'exercice 9

a) N'est pas libre. **b)** Est libre.
c) N'est pas libre. **d)** N'est pas libre.
e) Est libre. **f)** Est libre.

Exercice 2.11 : Les 3 affirmations sont vraies.

Exercice 2.12 : On peut montrer par exemple que :
$$(x^2 + 2x + 3) + 2(2x^2 - x - 5) - (3x^2 + x - 3) - (2x^2 - x - 4) = \boldsymbol{0}$$

Exercice 2.13 : Non, car $2f - g - 2h = 0$

Exercice 2.14 : **a)** La seule solution de l'équation $\alpha_1(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3) + \alpha_3(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$ est: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) On a $-1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) + 1(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3) - 1(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{0}$.

Exercice 2.15 : *Il s'agit d'exhiber la preuve dans les 2 sens (⇒) et (⇐).*

L'équation $\alpha_1(\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3) + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ revient à l'équation $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_1\lambda + \alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + (\alpha_1\mu + \alpha_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. Si les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sont libres, on aura donc $\alpha_1 = \alpha_1\lambda + \alpha_2 = \alpha_1\mu + \alpha_3 = 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ce qui montre que les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont libres.

De manière analogue, on montre que si les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ sont libres, alors les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sont libres.

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

$3M_{renf}$ – Jt 2015

Exercice 2.16 : **a)** Oui, par exemple $ax+b=\left(\frac{2a-b}{3}\right)\boldsymbol{p}_1+\left(\frac{2b-a}{3}\right)\boldsymbol{p}_2+0\boldsymbol{p}_3 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

b) non, car $5\boldsymbol{p}_1 + 2\boldsymbol{p}_2 - 3\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{0}$

c) $\boldsymbol{p}_3=\frac{5}{3}\boldsymbol{p}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{p}_2$

Exercice 2.17 : $\boldsymbol{w}=\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2$

Exercice 2.18 : par exemple :

$\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_4 \quad \Rightarrow$ On supprime $\boldsymbol{v}_3$.
$\boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 \quad \Rightarrow$ On supprime $\boldsymbol{v}_4$.
Ainsi la famille $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ est génératrice et libre.

Exercice 2.19 : **a)** C'est la base canonique de P_4.
b) La suite est libre, mais non génératrice.
c) La suite n'est ni libre, ni génératrice.
d) C'est une base de P_4.

Exercice 2.20 : **a)** La base canonique de V est formée des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

b) (1) N'est pas une base. **(2)** N'est pas une base. **(3)** Est une base.

Exercice 2.21 : **b)** 2 vecteurs ne peuvent suffire pour engendrer un E.V. de dim 3.
c)Par exemple $\boldsymbol{v}_3 = (6 ; -3 ; 1)$.

Exercice 2.22 : **a)** C'est une application facile de la définition d'espace vectoriel.
b) La famille $\{1 ; x ; x^2 ; \ldots ; x^n\}$ est une base de P_n. La dimension de P_n est donc $n + 1$.

Exercice 2.23 : La dimension de V est 4, car:
V contient une famille libre de 4 éléments $\Rightarrow$ $\dim(V) \geq 4$ et
V contient une famille génératrice de 4 éléments $\Rightarrow$ $\dim(V) \leq 4$.

Exercice 2.24 : L'espace vectoriel $\mathsf{F}([a ; b])$ est de dimension infinie (!!).

Exercice 2.25 : **a)** $\boldsymbol{z}_3=\frac{-1}{2}\boldsymbol{z}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{z}_2$

b) $\forall\, \boldsymbol{z} = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{z}=\left(-\frac{a}{10}-\frac{2b}{5}\right)\boldsymbol{z}_1+\left(\frac{3a}{10}+\frac{b}{5}\right)\boldsymbol{z}_2$

c) $\dim(\mathsf{F}) = 2$.

Exercice 2.26 : A est un sous-espace vectoriel. Une base de A est $(1 ; 0)$ et sa dimension est 1.

B n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin B$.

C est un sous-espace vectoriel, mais ne possède pas de base. Sa dimension est 0.

D n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin D$.

E est un sous-espace vectoriel. Une base est donnée par le vecteur $(1 ; -2)$. Sa dimension est 1.

F n'est pas un sous-espace vectoriel, car $(0 ; 0) \notin F$.

G est un sous-espace vectoriel. Une base est donnée par le vecteur $(1 ; 2)$. Sa dimension est 1.

H est un sous-espace vectoriel, car $H = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2.27 : A est un sous-espace vectoriel. Une base de A est $(0 ; 1 ; 0)$ et sa dimension est 1.

B n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin B$.

C est un sous-espace vectoriel. Une base est formée des vecteurs $(1 ; 0 ; 1)$ et $(0 ; 1 ; 1)$. Sa dimension est donc 2.

D n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin D$.

E est un sous-espace vectoriel.
Si $a = b = c = 0$, c'est $\mathbb{R}^3$ et sa dimension est 3.
Si $a \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(-b ; a ; 0)$ et $(-c ; 0 ; a)$.
Si $b \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(b ; -a ; 0)$ et $(0 ; -c ; b)$.
Si $c \neq 0$, une base de E est formée des vecteurs $(c ; 0 ; -a)$ et $(0 ; c ; -b)$.
Dans ces derniers cas, la dimension de E est 2.

F n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0 ; 0 ; 0) \notin F$.

Exercice 2.28 : Si les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_4$ étaient tous les deux nuls, la famille $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ ne serait pas génératrice dans $\mathbb{R}^3$.

La dimension 0 est impossible.

La dimension est 1 si $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (1 ; 0 ; 0)$.

La dimension est 2 si $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (0 ; 1 ; 0)$.

Exercice 2.29 : La famille est liée car $(2 ; 10 ; -7 ; 4) = 5(1 ; 2 ; -1 ; 0) + (-3 ; 0 ; -2 ; 4)$. La dimension de l'espace engendré par cette famille est 2 car les deux premiers vecteurs sont libres. On obtient une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant les vecteurs $(0 ; 0 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 0 ; 1)$.

Exercice 2.30 : On obtient a = -19 et b = -16

Exercice 2.31 : **a)** On montre facilement que la famille est libre. Comme elle comporte 3 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) La dimension est 2 et une base est formée des vecteurs (2 ; 1 ; -1) et (3 ; 2 ; 1). On a (1 ; 0 ; -3) = 2(2 ; 1 ; -1) – (3 ; 2 ; 1).

Exercice 2.32 : **a)** Soit $f(x)$ tel que $f(x) = f(-x)$ et $g(x)$ tel que $g(x) = g(-x)$.

- $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$ ok !!
- $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha \cdot f(-x) = \alpha \cdot f(x) = (\alpha \cdot f)(x)$ ok !!

b) Cela forme également un SEV. Même démarche

Exercice 2.33 : **a)** Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables sur $[a\,;\,b]$.

- $(f+g)'(x) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = (f'+g')(x)$ ok !!
- $(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$ ok !!

Exercice 2.34 : **a)** Une base est formée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ dim = 2.

b) N'est pas un sous-espace vectoriel, car la matrice nulle n'appartient pas à cet ensemble.

c) Une base est formée des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ dim = 3.

Exercice 2.35 : Soit $\boldsymbol{v}^* \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow v^* \in V_1$ et $v^* \in V_2$
Soit $\boldsymbol{v}' \in V_1 \cap V_2 \Leftrightarrow$ ……………………

- $\boxed{\textit{Montrons que } v^* + v' \in V_1 \cap V_2}$

Comme V_1 a une structure d'espace vectoriel, $v^* + v' \in V_1$
De même dans V_2.
Ainsi $v^* + v' \in V_1$ et $v^* + v' \in V_2$ donc $v^* + v' \in V_1 \cap V_2$.

- $\boxed{\textit{Montrons que } \alpha \cdot v^* \in V_1 \cap V_2}$

Même idées.

Exercice 2.36 : sans corrigé.

Exercice 2.37 : **a)** dim(S) = 2, base : ((3 ; 1 ; 0) ; (-1 ; 1 ; 0))
b) dim(S) = 1, base : ((4 ; -5 ; 1))

Exercice 2.38 : **a)** Faux. **b)** Vrai. **c)** Vrai.
d) Faux, il s'agit de la base **ordonnée** :
((1 ; 0 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 1 ; 0), (0 ; 0 ; 0 ; 1)).

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

$3M_{renf}$ – Jt 2015

Éléments de réponses Chapitre 3:

Exercice 3.1 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.2 :
a) T est linéaire
b) T n'est pas linéaire car par exemple $T(2(1\,;1)) \neq 2T(1\,;1)$
c) T est linéaire
d) T n'est pas linéaire car $T(0\,;0) \neq (0\,;0\,;0)$
e) T n'est pas linéaire car par exemple $T(2(0\,;\pi/2)) \neq T(0\,;\pi)$

Exercice 3.3 : soit $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit donc de vérifier que :

$$(f+g)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (f+g)(\boldsymbol{u}) + (f+g)(\boldsymbol{v}) \quad \text{et} \quad (f+g)(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) = \alpha\cdot(f+g)(\boldsymbol{u})$$

Ce qui s'obtient comme chaines d'égalités :

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{u})+g(\boldsymbol{v})\\ &= \big(f(\boldsymbol{u})+g(\boldsymbol{u})\big)+\big(f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v})\big) = (f+g)(\boldsymbol{u})+(f+g)(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) &= f(\alpha\cdot\boldsymbol{u})+g(\alpha\cdot\boldsymbol{u}) = \alpha\cdot f(\boldsymbol{u})+\alpha\cdot g(\boldsymbol{u})\\ &= \alpha\cdot\big(f(\boldsymbol{u})+g(\boldsymbol{u})\big) = \alpha\cdot(f+g)(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

Exercice 3.4 : Quelques soient f et $g \in \mathrm{D}([a\,;b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
a) Oui, car :

$$T(f+g) = 2(f+g) = 2f+2g = T(f)+T(g)$$
$$T(\alpha\cdot f) = 2(\alpha\cdot f) = \alpha\cdot(2f) = \alpha\cdot T(f)$$

b) Oui, il s'agit à nouveau de constituer 2 chaînes d'égalités :

$$T(f+g) = \ldots = T(f)+T(g) \quad \text{et} \quad T(\alpha\cdot f) = \ldots = \alpha\cdot T(f)$$

c) Oui **d)** Non

Exercice 3.5 :
a) $(1\,;2\,;-3) = -3(3\,;2\,;1) + 2(5\,;4\,;0)$
b) $T(1\,;2\,;-3) = T(-3(3\,;2\,;1) + 2(5\,;4\,;0)) = -3T(3\,;2\,;1) + 2T(5\,;4\,;0)$
$= -3(5\,;4\,;0) + 2(3\,;2\,;1) = (-9\,;-8\,;2)$

Exercice 3.6 : Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tels que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$, alors :

$$T(\boldsymbol{0}) = T(\alpha\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_n T(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}.$$

On a donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

Exercice 3.7 : La matrice représentant T est $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 3.8 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **e)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 3.9 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.10 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.11 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.12 : **a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $L(1\,;1\,;2\,;3\,;5) = (1\,;-14\,;9)$

Exercice 3.13 : La matrice représentant cette symétrie est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.14 : **a)** $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Déjà vu en théorie, mais vous devez être capable de le refaire.*

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 3.15 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.16 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3.17 : **a)** $A=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

b) Que pouvez-vous affirmer au sujet des positions respectives des images des 3 vecteurs de base ?

Exercice 3.18 : **a)** $M=\begin{pmatrix} 3/7 & 6/7 & -2/7 \\ 6/7 & -2/7 & 3/7 \\ -2/7 & 3/7 & 6/7 \end{pmatrix}$ **b)** $M^2 = Id_3$

Exercice 3.19 : **a)** Peut être vu ensemble (à votre demande)

b) ${}_{\mathrm{B}}M_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) M est inversible $\Leftrightarrow \det(M)\neq 0$

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Il s'agit de résoudre $M\cdot\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x)=x^2-4x+1$$

Exercice 3.20 : **a)** En considérant comme base canonique de $\mathbb{C}$: $\mathrm{B}=(1\,;\boldsymbol{i})$:

$${}_{\mathrm{B}}M_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $\left({}_{\mathrm{B}}M_{\mathrm{B}}\right)^3=M^3=2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Il s'agit de résoudre $M^3\cdot\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\left(M^3\right)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\boldsymbol{i}$$

Exercice 3.21 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.22 : **a)** et **b)** $U\circ T=T\circ U=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) non, par exple si T est la même rotation et U la projection sur Ox, alors $U\circ T\neq T\circ U$

Exercice 3.23 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.24: $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & -1 \\ \sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ou $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 3 & -1 \\ -\sqrt{6} & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 3.25 : **b)** ${}_{e}Id_{e'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ${}_{e''}Id_{e}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}_{e''}Id_{e'}={}_{e''}Id_{e}\cdot{}_{e}Id_{e'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c)

- $\boldsymbol{v}_{e'}={}_{e'}Id_{e}\cdot\boldsymbol{v}_{e}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{v}_{e''}={}_{e''}Id_{e}\cdot\boldsymbol{v}_{e}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$

  ou $\boldsymbol{v}_{e''}={}_{e''}Id_{e'}\cdot\boldsymbol{v}_{e'}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{w}_{e}={}_{e}Id_{e'}\cdot\boldsymbol{w}_{e'}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{u}_{e'}={}_{e'}Id_{e''}\cdot\boldsymbol{u}_{e''}=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1 & 4/3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

Exercice 3.26: **a)** ${}_{e}A_{e}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ${}_{f}A_{f}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) ***<u>1^ère^ méthode :</u>***

$$\left.\begin{aligned} T(3\,;1)&=(1\,;2\,;-5)=1\cdot\boldsymbol{f}_1+0\cdot\boldsymbol{f}_2-2\cdot\boldsymbol{f}_3 \\ T(5\,;2)&=(2\,;1\,;-3)=3\cdot\boldsymbol{f}_1+1\cdot\boldsymbol{f}_2-1\cdot\boldsymbol{f}_3 \end{aligned}\right\}\Rightarrow {}_{f}A_{e}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.26: **b)** ***2ème méthode :***

$${}_{f}A_{e} = {}_{f}Id_{canonique} \cdot {}_{canonique}A_{canonique} \cdot {}_{canonique}Id_{e}$$

$${}_{f}A_{e} = \left({}_{canonique}Id_{f}\right)^{-1} \cdot {}_{canonique}A_{canonique} \cdot {}_{canonique}Id_{e}$$

$${}_{f}A_{e} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 13 \\ -7 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.27 : $${}_{u}L_{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

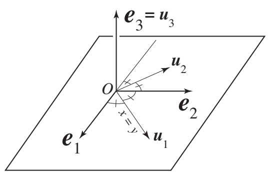
Exercice 3.28 : **a)** $T(1 ; 0) = (-5/4 ; -3/4)$ et $T(0 ; 1) = (3/4 ; 5/4)$ donc $A = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$

b) $$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{u}_1 = (1\,;3) & \Rightarrow & T(1;3) = (1;3) \\ \boldsymbol{u}_2 = (3\,;1) & \Rightarrow & T(3;1) = (-3;-1) \end{array}\right\} \Rightarrow {}_{u}T_{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}_{e}Id_{f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}_{f}Id_{e} = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$${}_{e}T_{e} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 & 3/4 \\ -3/4 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.29 : *Indication : Je vous propose de travailler sur cette figure, mais de ne pas lire la suite de la résolution avant la fin de la vôtre.*



QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 3.29 : Les 3 matrices à considérer sont :

$${}_{e}Id_{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{u}Id_{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $${}_{u}T_{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ pour finalement obtenir :

$${}_{e}T_{e} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.30 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.31 :
a) **2)** Ker(T) : axe Oy, Im(T) : axe Ox
3) dim Ker(T) = dim Im(T) = 1

b) **2)** Ker(T) : l'origine O, Im(T) : $\mathbb{R}^2$
3) dim Ker(T) = 0 et dim Im(T) = 2

c) **2)** Ker(T) : l'origine, Im(T) : $\mathbb{R}^3$
3) dim Ker(T) = 0 et dim Im(T) = 3

d) **2)** Ker(T) : axe Ox, Im(T) : Plan Oyz
3) dim Ker(T) = 1 et dim Im(T) = 2

4) Il semblerait que dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim (Espace vect)

Exercice 3.32 :
a) Ker(T) = $\{(t\,;-t\,;0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1. Une base est donnée par (1 ; -1 ; 0)

b) Ker(T) = $\{(0\,;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1.
Une base est donnée par (0 ; 1)

c) Ker(T) = $\{\boldsymbol{0}\}$ = {(0 ; 0)} est de dimension 0. Pas de base

d) Ker(T) = $\{\boldsymbol{0}\}$ = {(0 ; 0)} est de dimension 0. Pas de base

e) Ker(T) = $\{(t\,;-2t\,;t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est de dimension 1.
Une base est donnée par (1 ; -2 ; 1)

Exercice 3.33 : **1)** **a)** T est ni injective, ni surjective.
b) T est injective et surjective donc bijective.
c) T est injective et surjective donc bijective.
d) T est ni injective, ni surjective.

2) **a)** T n'est pas injective mais est surjective.
b) T est ni injective, ni surjective.
c) T est injective et surjective donc bijective.
d) T est injective et non surjective.
e) T est ni injective, ni surjective.

Exercice 3.34 : **a)** {(-7 ; 3 ; 1)}

b) $A\cdot\begin{pmatrix}-7\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

c) A^2 représente $F\circ F$. Comme $F(F(x))=0$, $A^2=0$

Exercice 3.35 : **a)** $F(1 ; 2 ; 3) = (1 ; 1 ; 2)$
b) $\mathrm{Ker}(F) = \{(0 ; t ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
c) Les solutions de $A\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ sont de la forme $(\alpha ; \alpha ; \beta)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et il est facile de voir que $\mathrm{Im}(F) = \{(\alpha ; \alpha ; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
d) C'est la projection sur le plan d'équation $x_1 = x_2$ parallèlement à la droite d'équations $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Exercice 3.36 : **a)** rang = 2
b) $\mathrm{Ker}(L_A) = \{\alpha\cdot(2 ; 0 ; 1 ; 0) + \beta\cdot(0 ; -1 ; 0 ; 3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ et $\dim \mathrm{Ker}(L_A) = 2$
c) $\mathrm{Im}(L_A) = \{\alpha\cdot(0 ; 0 ; 1) + \beta\cdot(1 ; 0 ; 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ et $\dim \mathrm{Im}(L_A) = 2$

Exercice 3.37 : **a)** $k \neq 1$ et $k \neq -2$
b) $k = -2$
c) $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = (1/2 ; 1/2 ; -1/2)$

Exercice 3.38 : **a)** $\dim \mathrm{Ker}(F) = 2$
b) impossible car $\begin{cases}\dim \mathrm{Ker}(T)+\dim \mathrm{Im}(T)=3\\ \dim \mathrm{Ker}(T)=\dim \mathrm{Im}(T)\end{cases}$ n'admet pas de sol entière
c) injective donc $\dim \mathrm{Ker}(R) = 0$ donc $\dim \mathrm{Im}(R) = 3$

Exercice 3.39 : $\mathrm{Ker}(T) = 0$

Exercice 3.40 : non car $\dim \mathrm{Im}(A) = 1$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$ donc A non injective.

Exercice 3.41 : Un corrigé sera vu à votre demande

Exercice 3.42 : **a)** rang A = rang $A^T = 2$ **b)** rang B = rang $B^T = 3$
c) rang C = rang $C^T = 3$ **d)** rang D = rang $D^T = 1$

Exercice 3.43 : Si $\lambda = -20$ alors rang $A = 3$, sinon rang $A = 4$

Exercice 3.44 : **a)** $\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ **b)** rang $A = 3$ **c)** dimension de l'image vaut 3
d) dimension du noyau vaut 1 **e)** une base est (-2 ; 0 ; 0 ; 1)

Exercice 3.45 : **a)** $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, la transformation inverse n'existe pas (elle n'est pas bijective)

b) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, les 2 matrices sont inverses, $AB = BA = \mathrm{Id}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, les 2 matrices sont inverses

d) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, la transformation inverse n'existe pas (elle n'est pas bijective)

Exercice 3.46 : **a)** A est inversible si et seulement si $\lambda \neq -1$ et

$$A^{-1}=\frac{1}{1+\lambda^3}\begin{pmatrix}-\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda^2&-\lambda\\\lambda^2&-\lambda&1\end{pmatrix}$$

b) B est toujours inversible et $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\lambda&-\lambda^2&\lambda^3\\0&1&-\lambda&\lambda^2\\0&0&1&-\lambda\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Éléments de réponses Chapitre 4:

Exercice 4.1 :
a) Oui, un vecteur propre $\boldsymbol{v} = (-2 ; 1)$.
Remarquons que n'importe quel multiple de ce vecteur est aussi un vecteur propre.
b) Non.
c) Oui, un vecteur propre $\boldsymbol{v} = (1 ; 1 ; -1)$.

Exercice 4.2 :
a) Tous les vecteurs vont subir cette rotation d'angle θ. Ainsi donc, $\boldsymbol{v}$ et $R(\boldsymbol{v})$ ne seront jamais colinéaires, car l'angle entre ces 2 vecteurs = θ.

b) Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs propres. La valeur propre associée est de -1. *Il s'agit en fait d'une symétrie centrale dont le centre est l'origine ou encore d'une homothétie de rapport -1.*

b) Tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont des vecteurs propres. La valeur propre associée est de 1. *Il s'agit en fait de l'identité.*

Exercice 4.3 :
a) Il s'agit de créer une chaîne d'égalités : $L(\alpha\boldsymbol{v}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\alpha\boldsymbol{v})$.

b) Il s'agit de créer une chaîne d'égalités : $L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$.

c) Et de conclure ici que : $L(\boldsymbol{w}) = \ldots\ldots\ldots = \lambda(\boldsymbol{w})$.

Exercice 4.4 :
a)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (0 ; 1)$, espace propre $V_1 = \{(0 ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Oy.
- Valeur propre $\lambda = -1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (1 ; 0)$, espace propre $V_{-1} = \{(t ; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Ox.

b)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{v} = (1 ; 1)$, espace propre $V_1 = \{(t ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = droite d'équation $x - y = 0$.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{w} = (-1 ; 1)$, espace propre $V_0 = \{(-t ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = droite d'équation $x + y = 0$.

c)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (0 ; 1 ; 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0 ; 0 ; 1)$ espace propre $V_1 = \{(0 ; t ; u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan Oyz.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (1 ; 0 ; 0)$, espace propre $V_0 = \{(t ; 0 ; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Ox.

d)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (1 ; 0 ; 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0 ; 0 ; 1)$ espace propre $V_1 = \{(t ; 0 ; u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan Oxy.
- Valeur propre $\lambda = -1$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (0 ; 1 ; 0)$, espace propre $V_{-1} = \{(0 ; t ; 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ = axe Oy.

e)
- Valeur propre $\lambda = 1$, vect. propres associés $\boldsymbol{v} = (1 ; 0 ; 0)$ et $\boldsymbol{w} = (0 ; 1 ; 1)$ espace propre $V_1 = \{(t ; u ; u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ = plan d'équation $y - z = 0$.
- Valeur propre $\lambda = 0$, vecteur propre associé $\boldsymbol{s} = (0 ; 1 ; -1)$, espace propre $V_0 = \{(0 ; t ; -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4.5 :
a) $V_1 = \{(0 ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(0 ; 1)\}$
$V_5 = \{(2t ; t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(2 ; 1)\}$

b) $V_{-2} = \{(t ; t ; 3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(1 ; 1 ; 3)\}$

c) $V_3 = \{(-2t - 3u ; t ; u) \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(-2 ; 1 ; 0) ; (-3 ; 0 ; 1)\}$
$V_8 = \{(t ; -t ; 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ de base $\{(1 ; -1 ; 2)\}$

Exercice 4.6 :
a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ *par exemple*
$S = \{(-7t ; 13t ; 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

b) la 3[ème] ligne peut s'écrire comme combinaison linéaire des 2 premières. On se retrouve alors avec 2 équations pour 3 inconnues.

c) Det $(A) = 0$ car on peut ramener la matrice à une matrice contenant une ligne de zéro et développer son déterminant par rapport à cette ligne.

Exercice 4.7 :
a) $\lambda^2 - 4\lambda - 45 = 0$ $\quad\lambda = 9$ et $\lambda = -5$
b) $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ $\quad\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$
c) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ $\quad\lambda = 3$ (de multiplicité 2)
d) $\lambda^2 - 9\lambda + 32 = 0$ $\quad$pas de valeur propre réelle (mais des complexes !!)

Exercice 4.8 :
L'équation caractéristique de cet endomorphisme est $\lambda^2 + 1 = 0$, n'admettant aucune valeur propre réelle donc pas de vecteur propre

Exercice 4.9 :
a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ $\quad\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ (de multiplicité 2)
b) $-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$ *(à factoriser avec le truc du reste)*
$\lambda = 1$ et $\lambda = -2$ (de multiplicité 2)

Exercice 4.10 :
a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$
b) $\lambda = 0$ de multiplicité 1, $\lambda = 1$ de multiplicité 2.
c) $V_{\lambda=0} = \{(-1 ; 1 ; 0)\cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$ droite vectorielle de dim 1.
$V_{\lambda=1} = \{(-2 ; 1 ; 0)\cdot t + (1 ; 0 ; 1)\cdot u \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ plan vectoriel de dim 2.
d) Il s'agit d'une projection sur le plan $x + 2y - z = 0$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$) de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$).

Exercice 4.11 : Il suffit d'observer le degré de l'équation caractéristique à résoudre

Exercice 4.12 : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire correspondent aux éléments diagonaux de cette matrice, ici : a_{11}, a_{12}, a_{13}

Exercice 4.13 : Les valeurs propres de cette matrice triangulaire correspondent aux éléments diagonaux: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$

Exercice 4.14 :

a) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

b) $\lambda = -1$ de multiplicité 1, $\lambda = 1$ de multiplicité 2.

c) $V_{\lambda=-1} = \{(1\ ;\ 1\ ;\ -1)\cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$ droite vectorielle de dimension 1.
$V_{\lambda=1} = \{(1\ ;\ -1\ ;\ 0)\cdot t + (1\ ;\ 0\ ;\ 1)\cdot u \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ plan vectoriel de dimension 2.

d) Il s'agit d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y - z = 0$.

Exercice 4.15 : Il s'agit d'une symétrie oblique par rapport au plan $z = 0$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$) de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$).

Exercice 4.16 :

a) La matrice est triangulaire donc $\lambda = 2$ de multiplicité 3.

b) $V_{\lambda=2} = \{(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\cdot t + (0\ ;\ 1\ ;\ 0)\cdot u + (0\ ;\ 0\ ;\ 1)\cdot v \mid t, u \text{ et } v \in \mathbb{R}\}$
Il s'agit donc de $\mathbb{R}^3$ lui-même. En fait, tout vecteur est vecteur propre.

c) Les résultats précédents correspondent bien à ce que l'on attend de la transformation géométrique qui est une homothétie de rapport 2.

Exercice 4.17 :

a) $\lambda = 5$ de multiplicité 1 et $\lambda = -3$ de multiplicité 2.

b) $V_{\lambda=5} = \{(-1\ ;\ -2\ ;\ 1)\cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$
$V_{\lambda=-3} = \{(-2\ ;\ 1\ ;\ 0)\cdot t + (3\ ;\ 0\ ;\ 1)\cdot u \mid t, u \in \mathbb{R}\}$

c) Si l'on considère la base formée par les vecteurs propres ordonnés selon les réponses **a)** et **b)** on a $A_{propre} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.18 :

a) $4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 3\lambda = 0$

b) $\lambda = 0,\ \lambda = -1/2,\ \lambda = -3/2$

c) La base e' est constituée des vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives :
$e' = ((1\ ;\ 1\ ;\ -1)\ ;\ (1\ ;\ 1\ ;\ -2)\ ;\ (1\ ;\ -1\ ;\ 0))$

d) ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad {}_{e'}Id_{e} = \left({}_{e}Id_{e'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

On peut contrôler que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

e) $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3/2)^n \end{pmatrix}$

$\left({}_{e}A_{e}\right)^n = \left({}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}\right) \cdot \ldots \cdot \left({}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}\right) = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A^n_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e}$

f) $\left({}_{e'}A_{e'}\right)^6 = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A^6_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e} = \begin{pmatrix} 91/16 & -365/64 & -1/64 \\ -365/64 & 91/16 & -1/64 \\ 1/64 & 1/64 & 1/32 \end{pmatrix}$

Exercice 4.19 :

a) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ $\qquad \lambda = -1,\ \lambda = 1$
$V_{\lambda=-1} = \{(3\ ;\ -3\ ;\ 1)\cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$
$V_{\lambda=1} = \{(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\cdot t + (-1\ ;\ 0\ ;\ 3)\cdot u \mid t \text{ et } u \in \mathbb{R}\}$

b) ${}_{e'}H_{e'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ${}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

c) Les images des vecteurs de la base canonique correspondent aux 3 colonnes de la matrice ${}_{e}H_{e}$. Ces 3 vecteurs sont bien orthogonaux entre eux et de norme 1.

d) Il s'agit de la symétrie orthogonale vectorielle de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.20 :

a) $\lambda = 1,\ \lambda = -1$

b) ${}_{e'}A_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à la base $e' = ((2\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ -2))$

c) ${}_{e}Id_{e'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, ${}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d) ${}_{e}A_{e} = {}_{e}Id_{e'} \cdot {}_{e'}A_{e'} \cdot {}_{e'}Id_{e} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$