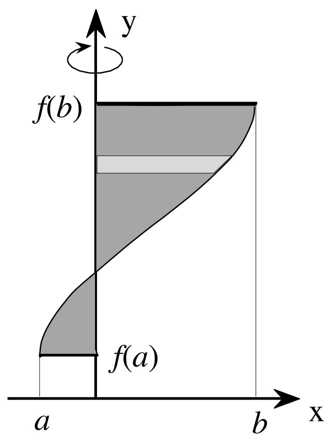
Annexe du chapitre 10: Application des intégrales

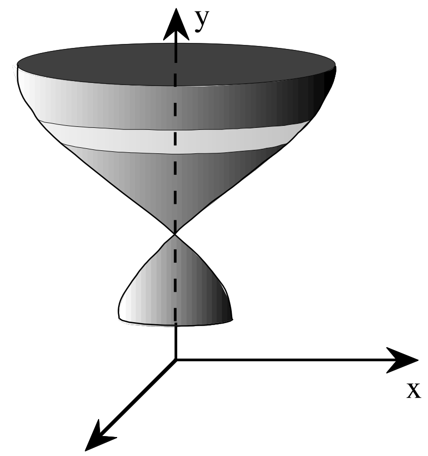
Après avoir calculé des volumes de solides engendrés par la révolution autour de l'axe Ox d'une portion de courbe y = f (x), nous effectuerons de même autour de l'axe Oy. Nous généraliserons la méthode à quelques solides comparables à un "empilement de tranches".

A.1 Calcul d'un volume de révolution autour de l'axe *Oy*.

Formule : Le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Oy du domaine limité par le graphe de $y = f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ se calcule à l'aide de:

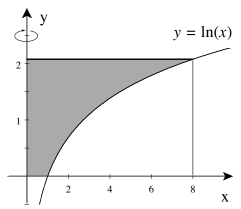
$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left({}^{r}f(y)\right)^2 dy$$



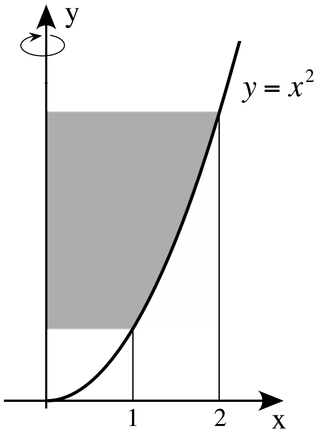


Observons ceci sur un exemple :

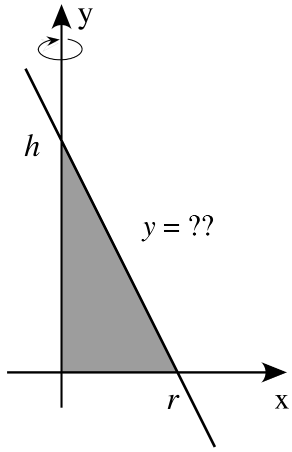
Exemple : Représenter puis calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Oy représenté ci-contre:



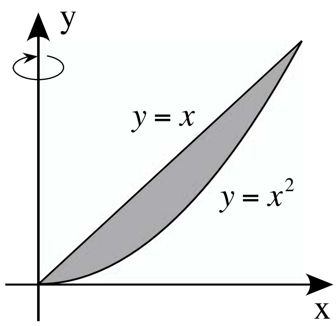
Exercice A10.1: Représenter approximativement l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Oy, puis calculer son volume.



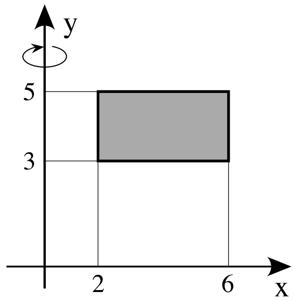
a)



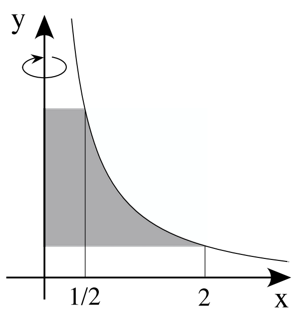
b)



c)

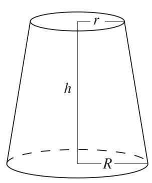


d)

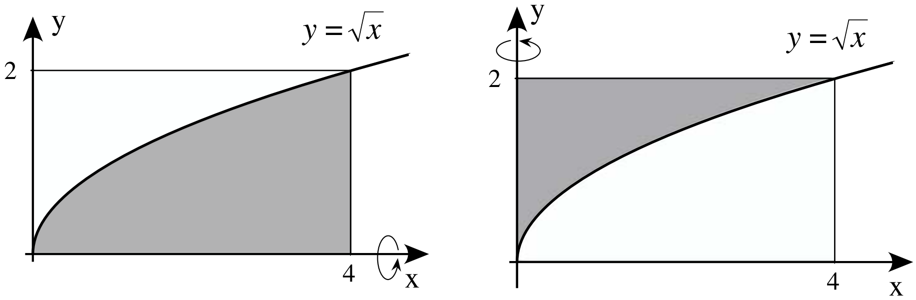


e)

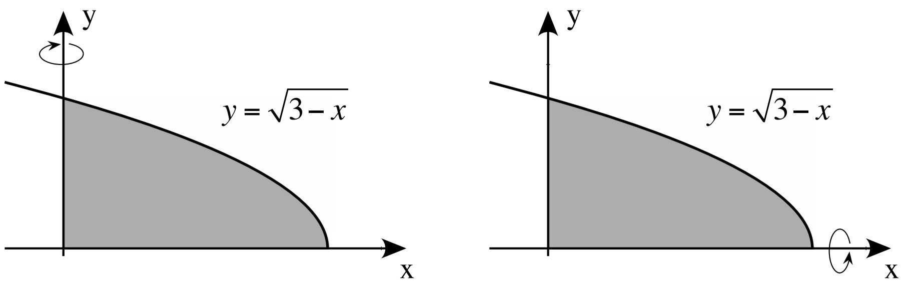
Exercice A10.2: Donner le volume du tronc de cône représenté ci-contre.



Exercice A10.3: **1)** Représenter approximativement le volume engendré par la révolution autour de l'axe précisé
2) Lequel des 2 objets comparés admet le plus grand volume ?



a)

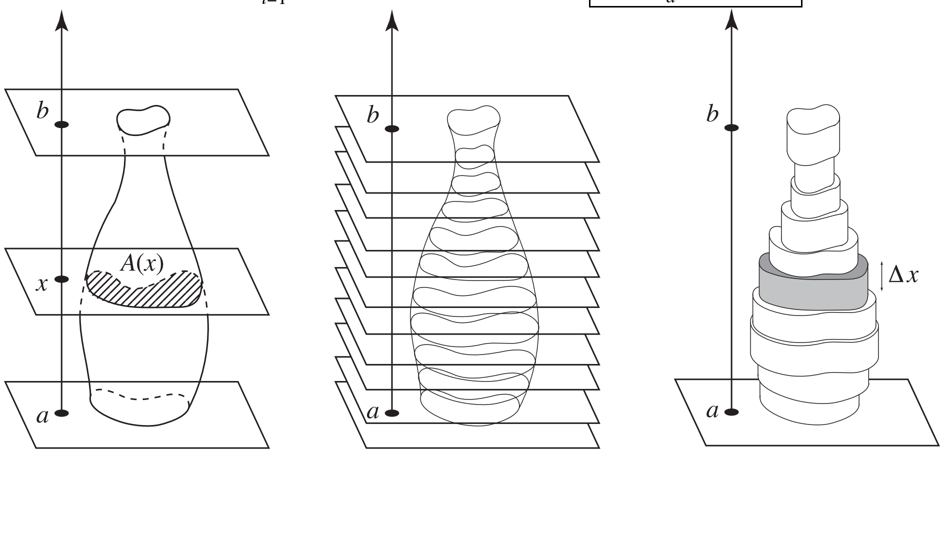


b)

A.2 Calcul d'un volume découpé en tranches

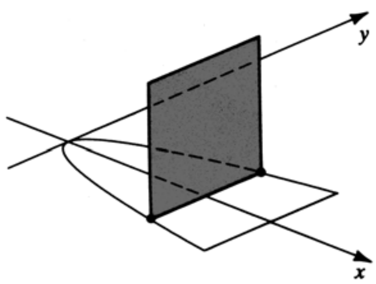
Formule : Soit S un solide compris entre les plans $x = a$ et $x = b$ (qui sont perpendiculaires à l'axe Ox). Pour tout $x \in [a\,;\,b]$ on désigne par $A(x)$ l'aire de intersection de S et du plan perpendiculaire à l'axe en x.
Si $A(x)$ est continue sur $[a\,;\,b]$, alors le volume V du solide S est donné par:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\cdot \Delta x \quad \text{ou plutôt} \quad \boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx}$$

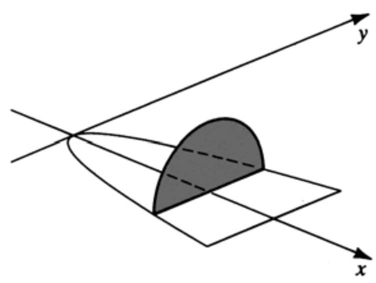


Exemple : La base d'un solide est le cercle du plan Oxy d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. Chaque section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe Oy est un demi-cercle dont l'un des côtés est dans la base.
Calculer le volume de ce solide.

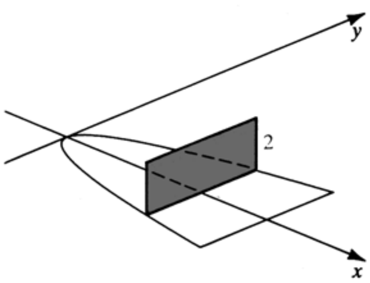
Exercice A10.4: Dans le plan Oxy, on considère la région R délimitée par $x = y^2$ et $x = 9$. Calculer le volume du solide, dont R est la base et dont chaque section par un plan perpendiculaire à Ox a la forme donnée, après avoir esquissé le solide :



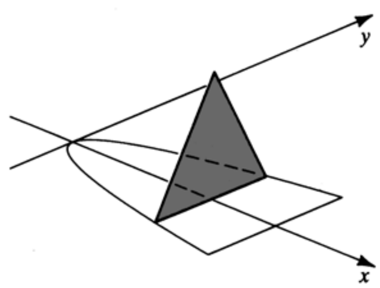
a) un carré



b) un demi-cercle



c) un rectangle de hauteur 2

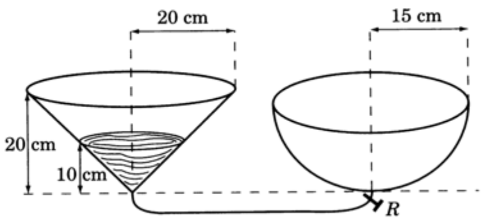


d) un triangle équilatéral

Exercice A10.5: La base d'un solide S est située dans le plan Oxy. Cette base est le domaine borné délimité par $y = x$ et $y = x^2$. Chaque section de S par un plan perpendiculaire à Ox est un carré dont l'un des côtés est dans la base. Esquisser ce solide et calculer son volume.

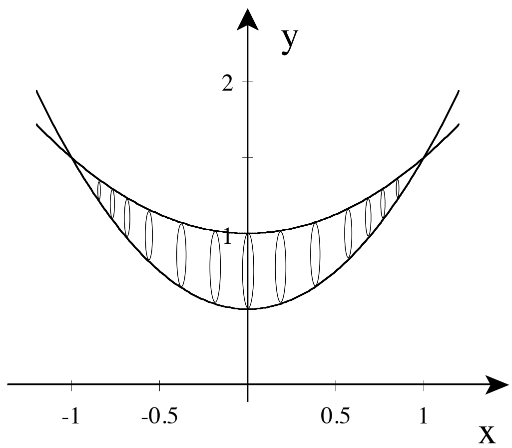
Exercice A10.6: La base d'un solide est le cercle du plan Oxy d'équation $x^2 + y^2 = 4$. Chaque section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe Oy est un carré dont l'un des côtés est dans la base. Calculer le volume de ce solide.

Exercice A10.7: Déterminer la hauteur atteinte par le liquide dans le cône et la demi-sphère après l'ouverture du robinet R.



Exercice A10.8: Déterminer le volume du croissant de section circulaire et borné par les deux fonctions f et g définies par:

$$f(x) = x^2 + \tfrac{1}{2} \text{ et } g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 1.$$



VI ANNEXE CHAPITRE 10