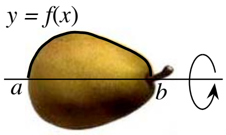
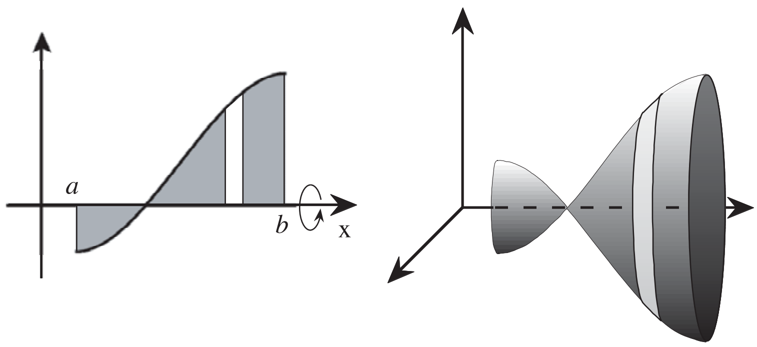
# Chapitre 10: Applications des intégrales

## 10.1 Les intégrales pour calculer le volume d'un solide de révolution




L'objectif de ce chapitre est de vous présenter une (parmi de multiples) application du calcul intégral.

Il s'agira de calculer le volume de solides généré par la révolution autour de l'axe $Ox$ d'une portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.




**Méthode des disques**

L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle $[a, b]$ en $n$ sous-intervalles de largeur identique:

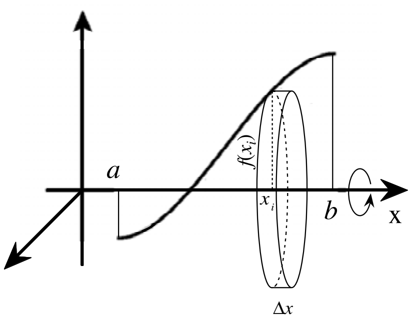
$[x_0 ; x_1]$, $[x_1 ; x_2]$, ..., $[x_{n-1} ; x_n]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a ; b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire: $\Delta x = (b - a) / n$.

Pour chaque $i = 0, 1, ..., n - 1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i ; x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.

Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe $Ox$, chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume $\pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x$.

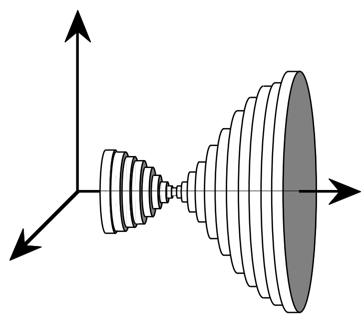
Le volume du corps de révolution sera la somme de tous ces cylindres :




$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[ f(x_i) \right]^2 \Delta x$$

Qui se traduira en termes d'intégrale par

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[ f(x) \right]^2 \, dx}$$

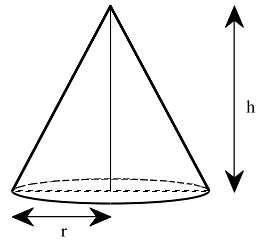


**Voici le même volume de révolution approché par une série de cylindres.**

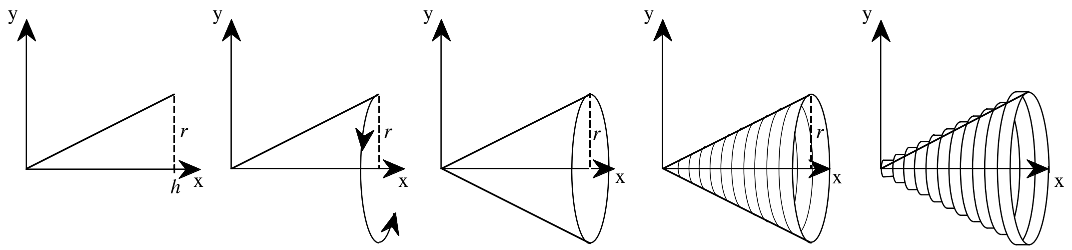
**<u>Exemple:</u>**

**<u>But:</u> retrouver la formule "connue" du volume du cône:**

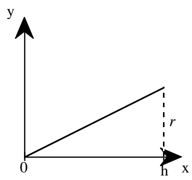
$$\boxed{\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h}$$



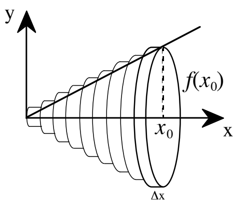

❶ Démarche générale




❷ Recherche de la fonction:



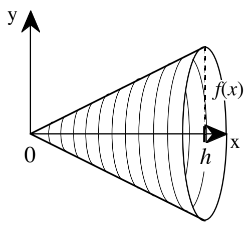

❸ Expression du volume "d'une tranche":




Volume =

❹ Expression du volume du cône:

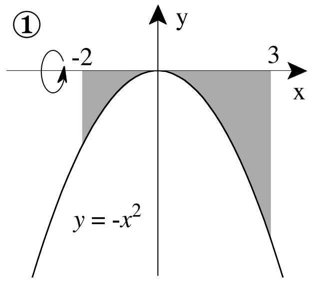
$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$



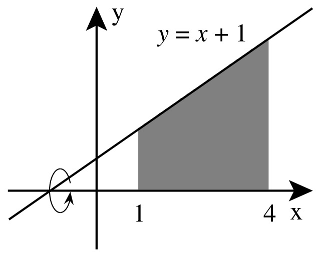

Volume =

**Exercice 10.1 :** Représenter approximativement l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de $Ox$ puis calculer son volume :

①

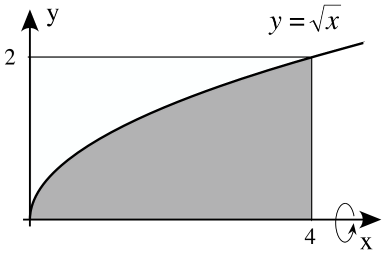



②

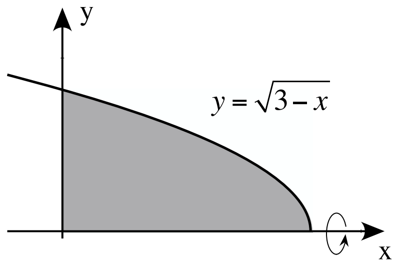



**Exercice 10.2 :** Mêmes consignes

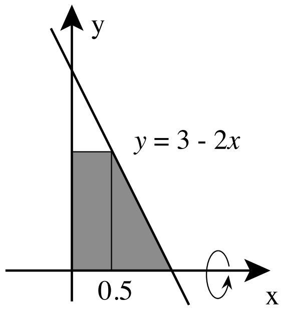
①



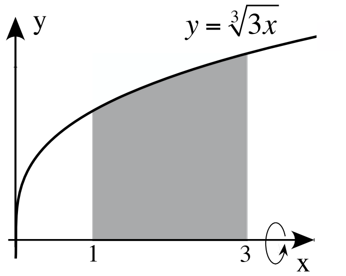

②



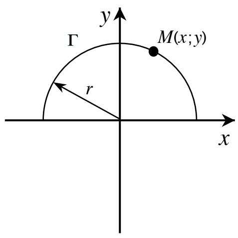

③




④




**Exercice 10.3 :** On désire démontrer que le volume de la sphère de rayon $r$ est donné par: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.




**a)** Montrer que $M(x\,;\,y) \in$ au demi-cercle **supérieur** $\Gamma$ centré en $O$ de rayon $r$

$$\Updownarrow$$

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

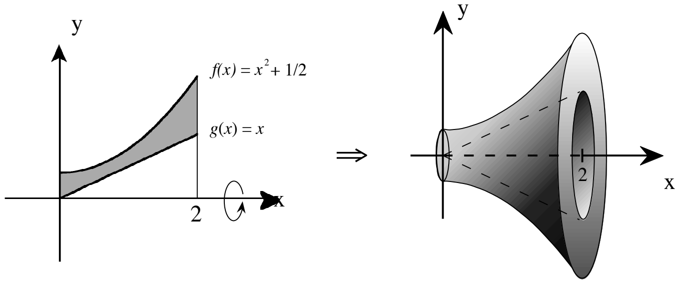
*Le volume de la sphère*
*Est égal si l'on sait faire*
*À quatre tiers pi r trois*
*Même si la sphère est en bois*

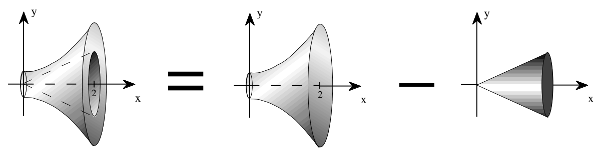
**b)** En déduire l'expression de la fonction $f$ correspondante à ce demi-cercle ainsi que son ensemble de définition.

**c)** Calculer le volume de la sphère engendrée par la rotation de $y = f(x)$ autour de $Ox$.

## 10.2 Calcul du volume d'un solide de révolution « creux »

On va maintenant calculer le volume engendré par la révolution autour de $Ox$ d'une surface comprise entre deux courbes :



$$V = \pi\int_0^2 [f(x)]^2\,dx - \pi\int_0^2 [g(x)]^2\,dx$$

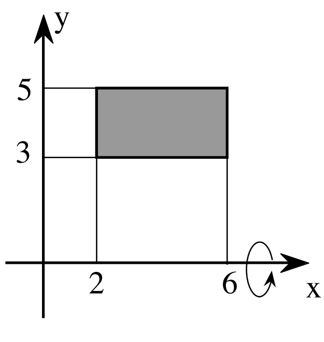
Ou plus rapidement

$$\boxed{V = \pi\int_0^2 [f(x)]^2 - [g(x)]^2\,dx}$$

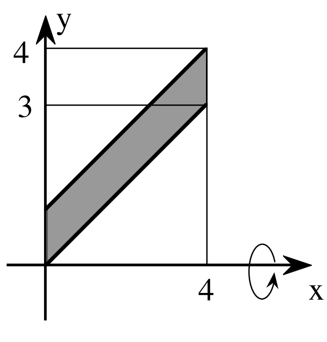
Dans notre cas :

**Exercice 10.4 :** Représenter approximativement l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de $Ox$ puis calculer son volume :

①

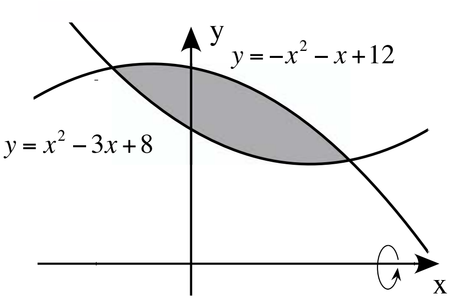



②

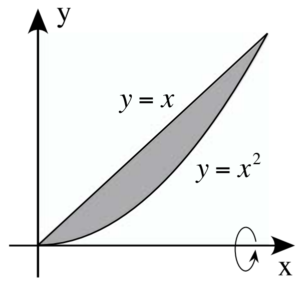


**Exercice 10.5 :** Mêmes consignes

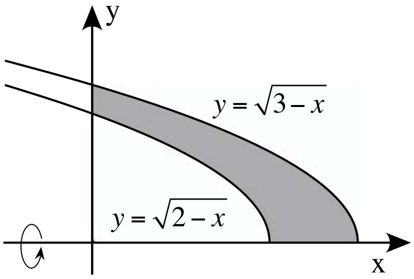
①




②




③




④