

# Éléments de réponses de combinatoire

✓ Ok, sans problème du 1<sup>er</sup> coup. ! Ok, bien compris après explications. ? Pas sûr d'avoir vraiment compris. À reprendre.

## §1. Le principe de multiplication

✓ ! ?

- Ex 1** 24
- Ex 2** a)  $340 = 256 + 64 + 16 + 4$ .  
Il s'agit de considérer les nombres à un, deux, trois ou quatre chiffres.  
b) 64 selon le même principe.
- Ex 3** a) 13'440      b) 5'376
- Ex 4** 1'594'323
- Ex 5** 2'880
- Ex 6** a) 2'340'000      b) 1'920'000

## §2. Les permutations

- Ex 7**  $P_6 = 720$
- Ex 8**  $\bar{P}_{11}(4;4;2) = 34'650$        $\bar{P}_9(4;2;2) = 3'780$
- Ex 9**  $P_3 \cdot \bar{P}_5(2;2) = 180$
- Ex 10**  $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 + 1 + 1 = 90$
- Ex 11**  $P_4 = 24$
- Ex 12** a)  $P_9/9$  ou  $P_8 = 40'320$       b)  $2 \cdot P_7 = 10'080$
- Ex 13** a)  $P_5 = 120$       b) même réponse. Pas d'influence
- Ex 14**  $\bar{P}_{10}(7;3) = 120$
- Ex 15**  $P_4 = 24$
- Ex 16**  $3 \cdot \bar{P}_4(2) = 36$
- Ex 17** a)  $\bar{P}_7(2;3;2) = 210$       b) **40** Additionner (1'2..... avec 1'1.....)
- Ex 18**  $\bar{P}_6(2;2;2) = 90$

## §3. Les arrangements

- Ex 19**  $A_4^{10} = 5'040$
- Ex 20** a)  $\bar{A}_5^{26} = 26^5 = 11'881'376$       b)  $A_5^{26} = 7'893'600$
- Ex 21** a)  $8^5 = 32'768$       b)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$
- Ex 22** a)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$       b)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$
- Ex 23** a)  $\bar{A}_2^{26} = 26^2 = 676$       b) **677** (un de plus que la partie a))

- Ex 24** a)  $A_2^3 = 6$       b)  $2 \cdot 1 = 2$
- Ex 25**  $5 \cdot \dots \cdot 5 = 5^4 = 625$
- Ex 26**  $A_4^{10} = 5'040$
- Ex 27**  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

## §4. Les combinaisons

- Ex 28** Les solutions seront étudiées ensemble
- Ex 29**  $C_2^{12} = 66$  (car pour qu'il y ait une poignée de main, il faut 2 personnes)
- Ex 30**  $C_2^9 = 36$
- Ex 31**  $C_3^{31} = 4'495$
- Ex 32**  $C_5^{10} \cdot C_2^6 = 3'780$
- Ex 33** a)  $C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32$       b)  $C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 1'008$       c)  $C_5^{36} - C_5^{32} = 175'616$   
d)  $C_5^{36} - C_5^{32} - C_4^4 \cdot C_1^{32} = 31'776$
- Ex 34**  $C_2^8 \cdot C_2^7 = 588$  (car pour définir un rectangle, il faut choisir 2 verticales parmi... et ...)
- Ex 35** a)  $C_5^{15} = 3'003$       b)  $C_3^7 \cdot C_2^8 = 980$
- Ex 36**  $C_6^{45} = 8'145'060$  /  $C_3^6 \cdot C_3^{39} = 182'780$  /  $C_6^6 = 1$

## §5. Permutation - Arrangement - Combinaison      lequel choisir ?

- Ex 37** a)  $A_3^{12} = 1'320$       b)  $C_3^{12} = 220$
- Ex 38** a)  $C_3^{12} = 220$       b)  $A_3^{12} = 1'320$       c)  $\bar{A}_3^{12} = 1'728$
- Ex 39**  $6^3 = 216$  /  $2 \cdot 6^2 = 72$  /  $2 \cdot 6^2 = 72$  /  $1 \cdot 6^2 = 36$
- Ex 40** a)  $C_8^{10} = 45$       b)  $C_5^7 = 21$       c)  $C_4^5 \cdot C_4^5 = 25$
- Ex 41** Le triangle de Pascal  
•  $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$       •  $C_{10}^{14} x^4 y^{10} = 1'001 x^4 y^{10}$
- Ex 42** Il s'agit donc de constituer une chaîne d'égalités :  
$$C_p^n + C_{p+1}^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{p+1}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{p+1}^{n+1}$$
- Ex 43**  $C_2^4 = 6$  (pensez au  $\Delta$  de Pascal)
- Ex 44** a)  $C_4^8 = 70$       b)  $3 \cdot 10 = 30$       c)  $3/7 = 42,86\%$
- Ex 45** a)  $C_3^{36} = 7'140$       b)  $C_1^4 \cdot C_2^4 = 24$       c)  $C_3^{32} = 4'960$       d)  $C_3^{36} - C_3^{32} = 2'180$       e)  $C_1^4 \cdot C_2^{32} = 1'984$
- Ex 46**  $\bar{P}_8(2;4;2) = 420$
- Ex 47**  $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 31$
- Ex 48** a) 2'673      b) 5'832      c) 35
- Ex 49** a) 120      b) 72      c) 12
- Ex 50** a) 720      b) 360      c) 60      d) 240      e) 144
- Ex 51** a)  $2,0923 \cdot 10^{13}$       b)  $3,2514 \cdot 10^9$       c)  $4,1618 \cdot 10^{11}$
- Ex 52** 8 convives (Il s'agit de résoudre l'équation  $C_2^x = 28$ )

# Éléments de réponses de probabilités

## §1. Premières notions:

### Exercice 1:

- 1)  $U = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$
- 2)  $A = \{PPP; PPF; PFP; PFF\}$
- 3)  $B = \{PPP; PPF; FPP; FPF\}$
- 4)  $\bar{A} = \{FPP; FPF; FFP; FFF\}$
- 5)  $A \cap B = \{PPP; PPF\}$
- 6)  $C = \{FFP; FPF; PFF; FFF\}$

### Exercice 2:

- a) L'ensemble des filles de 1<sup>ère</sup> ou de 2<sup>ème</sup> année.
- b) L'ensemble des filles (du gymnase) n'ayant pas la nationalité suisse.
- c) L'ensemble des garçons de 1<sup>ère</sup> ou 3<sup>ème</sup> année de nationalité suisse.

### Exercice 3:

$$\bar{A} ; \bar{B} ; \bar{A} \cup \bar{B} ; \bar{A} \cap \bar{B}$$

## §2. Approche intuitive de la notion de probabilité:

### Exercice 4:

- 1)  $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{6840}{15600} \cong 43,85 \%$
- 2)  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{120}{15600} \cong 0,7692 \%$
- 3)  $\frac{1}{15600} \cong 0,0064 \%$
- 4)  $\frac{6}{15600} \cong 0,0385 \%$

### Exercice 5:

- 1)  $\frac{6}{16} = 37,75 \%$
- 2)  $\frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 31,25 \%$

### Exercice 6 :

- 1)  $\frac{210}{1680} = 12,5 \%$
- 2)  $\frac{90}{1680} \cong 5,36 \%$
- 3)  $\frac{360}{1680} \cong 21,43 \%$

### Exercice 7:

- 1) 18,18 %
- 2) 1,01 %

### Exercice 8:

- 1) 4,55 %
- 2) 27,27 %
- 3) 38,18 %
- 4) 61,82 %
- 5) 74,55 %
- 6) 76,36 %

### Exercice 9:

- 1) 22,22 %
- 2) 34,76 %
- 3) 65,24 %

### Exercice 10:

- 1) 9,31 %
- 2) 69,09 %
- 3) 30,91 %

### Exercice 11:

- |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| 1) 0,033 % | 2) 0,802 % | 3) 0,067 % | 4) 0,134 % |
| 5) 0,008 % | 6) 0,006 % | 7) 53,42 % | 8) 46,58 % |
| 9) 91,57 % | 10) 9,63 % |            |            |

### Exercice 12:

- |           |           |            |
|-----------|-----------|------------|
| 1) 4,63 % | 2) 9,26 % | 3) 90,74 % |
|-----------|-----------|------------|

### Exercice 13:

20,51 %

## §3. Calculs de probabilité en utilisant des diagrammes de Venn:

### Exercice 14:

- |         |         |
|---------|---------|
| 1) 40 % | 2) 70 % |
|---------|---------|

### Exercice 15:

- |         |        |        |
|---------|--------|--------|
| 1) 86 % | 2) 6 % | 3) 4 % |
|---------|--------|--------|

### Exercice 16:

- |        |         |          |
|--------|---------|----------|
| 1) 1/2 | 2) 3/14 | 3) 35/52 |
|--------|---------|----------|

### Exercice 17:

- |         |        |         |         |
|---------|--------|---------|---------|
| 1) 96 % | 2) 4 % | 3) 19 % | 4) 22 % |
| 5) 10 % |        |         |         |

### Exercice 18:

- |                      |           |            |         |
|----------------------|-----------|------------|---------|
| 1) 2300 possibilités | 2) 9,57 % | 3) 50,43 % | 4) 36 % |
| 5) 40 %              |           |            |         |

## §4. Calculs de probabilité en utilisant les diagrammes en arbre:

### Exercice 19:

$\frac{35}{768}$

### Exercice 20:

- |         |        |        |
|---------|--------|--------|
| 1) 58 % | 2) 49% | 3) 79% |
|---------|--------|--------|

### Exercice 21:

- |         |        |
|---------|--------|
| 1) 60 % | 2) 40% |
|---------|--------|

### Exercice 22:

- |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| 2) 2,16 % | 3) 97,84% | 4) 25,68% |
|-----------|-----------|-----------|

### Exercice 23:

56 %

### Exercice 24:

98,35 %

### Exercice 25:

- |                   |           |          |
|-------------------|-----------|----------|
| 1) $\frac{1}{10}$ | 2) 5,90 % | 3) 27,1% |
|-------------------|-----------|----------|

## §5. Épreuves de Bernoulli

**Exercice 26:** 2,56 %

**Exercice 27:** 36,72%

**Exercice 28:**

En fait, il s'agit de se convaincre que  $\overline{P}_n(k; n-k) = C_k^n$

**Exercice 29:**

1) 27,87 %      2) 99,93 %      3) au moins 4 flèches (solution de  $(0,4)^x < 0,05$  avec  $\log$ )

## §6. Et si l'inconnue n'est plus la probabilité, mais la taille de l'arbre

**Exercice 30:** au moins 52 élèves (solution de  $(14/16)^x < 0,001$  avec  $\log$ )

**Exercice 31:** Il devra faire au moins 5 placements.

## §7. Probabilité conditionnelle et événements indépendants

**Exercice 32:**

1) 7/23      2) 7/22      3) 1/2      4) 17/22      5) 13/19

**Exercice 33:**

1.a) 8 %      1.b) 6 %      1.c) 14 %      2) 42,86 %      3) 20 %

**Exercice 34:**

1)  $\frac{3}{8}$       2)  $\frac{1}{4}$

**Exercice 35:**

$\frac{1}{9}$        $\frac{3}{4}$        $\frac{1}{12}$       1

**Exercice 36:**

1) 23,96%      2) 62,44%      3) 17%

**Exercice 37:** 37,5 %

**Exercice 38:**

- 1)  $U = \{FFF; FFP; FPF; PFF; FPP; PFP; PPF; PPP\}$   
2)  $P(B) = 4/8, P(B|A) = 2/4, P(A) = 4/8$  et  $P(A \cap B) = 2/8$   
3) Deux justifications possibles:  $P(A \cap B) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(B)$  ou  $P(B|A) = 1/2 = P(B)$

**Exercice 39:**

- 1)  $P(\text{allemand et Tennis}) = 33/150, P(\text{allemand}) \cdot P(\text{Tennis}) = 26/125$ .  
Ces événements ne sont donc pas indépendants.  
2)  $P(\text{anglais et Voile}) = 9/50, P(\text{anglais}) \cdot P(\text{Voile}) = 9/50$ .  
Ces événements sont donc indépendants.

## §8. Un petit mélange

**Exercice 40:**

- 1)  $58\% = 48\% + 10\%$  (somme de 2 branches)  
2) 28,57%  
3) 80% (correspond directement à la valeur sur une branche)

**Exercice 41:** 21,67 %

**Exercice 42:**

- 1)  $P(A) = 3/4, P(B) = 1/2, P(A \cap B) = 3/8$ . On a bien  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .  
2)  $P(A) = 1/2, P(B) = 3/4, P(A \cap B) = 1/2$ . Ces événements sont donc dépendants.

**Exercice 43:**

1) 8,33 %      2) 91,67 %

**Exercice 44:**

- 1)  $P(\text{as - as} | \text{as - roi ou as - as}) = \frac{P(\text{as - as})}{P(\text{as - roi ou as - as})} = \frac{C_2^4}{C_1^4 \cdot C_1^4 + C_2^4} = 27,27\%$   
2)  $P(\text{as - as} | \text{asr - autre ou asr - asr}) = \frac{P(\text{asr - asr ou asr - asn})}{P(\text{asr - autre ou asr - asr})} = \frac{C_2^2 + C_1^2 \cdot C_1^2}{C_1^2 \cdot C_1^6 + C_2^2} = 38,46\%$   
3)  $P(\text{as - as} | \text{asc - autre}) = \frac{P(\text{asc - as})}{P(\text{asc - autre})} = \frac{C_1^1 \cdot C_1^3}{C_1^1 \cdot C_1^7} = 42,86\%$

**Exercice 45:**

1) 1,9%      2) 92,11%      3) 23 véhicules

**Exercice 46:**

- 1)  $p = \frac{C_2^6 + C_2^n + C_2^{24-n}}{C_2^{30}} = \dots = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}$   
2)  $n = 12$  pièces de 2 francs  
3)  $n = 1$  ou  $n = 23$  pièces de 2 francs.  
*Si vous avez obtenu  $n = 0$  ou  $n = 24$ , je vous propose de relire attentivement la donnée...*