

# Éléments de réponses de combinatoire

✓ Ok, sans problème du 1<sup>er</sup> coup. ! Ok, bien compris après explications. ? Pas sûr d'avoir vraiment compris. À reprendre.

## §1. Le principe de multiplication

✓ ! ?

**Ex 1** 24

**Ex 2** a)  $340 = 256 + 64 + 16 + 4$ .

Il s'agit de considérer les nombres à un, deux, trois ou quatre chiffres.

b) 64 selon le même principe.

**Ex 3** a) 13'440      b) 5'376

**Ex 4** 1'594'323

**Ex 5** 2'880

**Ex 6** a) 2'340'000      b) 1'920'000

## §2. Les permutations

**Ex 7**  $P_6 = 720$

**Ex 8**  $\bar{P}_{11}(4;4;2) = 34'650$        $\bar{P}_9(4;2;2) = 3'780$

**Ex 9**  $P_3 \cdot \bar{P}_5(2;2) = 180$

**Ex 10**  $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 + 1 + 1 = 90$

**Ex 11**  $P_4 = 24$

**Ex 12** a)  $P_{9/9}$  ou  $P_8 = 40'320$       b)  $2 \cdot P_7 = 10'080$

**Ex 13** a)  $P_5 = 120$       b) même réponse. Pas d'influence

**Ex 14**  $\bar{P}_{10}(7;3) = 120$

**Ex 15**  $P_4 = 24$

**Ex 16**  $3 \cdot \bar{P}_4(2) = 36$

**Ex 17** a)  $\bar{P}_7(2;3;2) = 210$       b) 40 Additionner (1'2..... avec 1'1.....)

**Ex 18**  $\bar{P}_6(2;2;2) = 90$

## §3. Les arrangements

✓ ! ?

**Ex 19**  $A_4^{10} = 5'040$

**Ex 20** a)  $\bar{A}_5^{26} = 26^5 = 11'881'376$       b)  $A_5^{26} = 7'893'600$

**Ex 21** a)  $8^5 = 32'768$       b)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$

**Ex 22** a)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$       b)  $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4 = 6'720$

**Ex 23** a)  $\bar{A}_2^{26} = 26^2 = 676$       b) 677 (un de plus que la partie a))

**Ex 24** a)  $A_2^3 = 6$       b)  $2 \cdot 1 = 2$

**Ex 25**  $5 \cdot \dots \cdot 5 = 5^4 = 625$

**Ex 26**  $A_4^{10} = 5'040$

**Ex 27**  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 900$

## §4. Les combinaisons

**Ex 28** Les solutions seront étudiées ensemble

**Ex 29**  $C_2^{12} = 66$  (car pour qu'il y ait une poignée de main, il faut 2 personnes)

**Ex 30**  $C_2^9 = 36$

**Ex 31**  $C_3^{31} = 4'495$

**Ex 32**  $C_5^{10} \cdot C_2^6 = 3'780$

**Ex 33** a)  $C_4^4 \cdot C_1^{32} = 32$       b)  $C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = 1'008$       c)  $C_5^{36} - C_5^{32} = 175'616$

d)  $C_5^{36} - C_5^{32} - C_1^4 \cdot C_4^{32} = 31'776$

**Ex 34**  $C_2^8 \cdot C_2^7 = 588$  (car pour définir un rectangle, il faut choisir 2 verticales parmi... et ...)

**Ex 35** a)  $C_5^{15} = 3'003$       b)  $C_3^7 \cdot C_2^8 = 980$

**Ex 36**  $C_6^{45} = 8'145'060$  /  $C_3^6 \cdot C_3^{39} = 182'780$  /  $C_6^6 = 1$

## §5. Permutation - Arrangement - Combinaison      lequel choisir ?

**Ex 37** a)  $A_3^{12} = 1'320$       b)  $C_3^{12} = 220$

**Ex 38** a)  $C_3^{12} = 220$       b)  $A_3^{12} = 1'320$       c)  $\bar{A}_3^{12} = 1'728$

# Éléments de réponses de probabilités

✓ ! ?

**Ex 39**  $6^3 = 216$  /  $2 \cdot 6^2 = 72$  /  $2 \cdot 6^2 = 72$  /  $1 \cdot 6^2 = 36$

**Ex 40** a)  $C_8^{10} = 45$     b)  $C_5^7 = 21$     c)  $C_4^5 \cdot C_4^5 = 25$     d)  $C_4^5 \cdot C_4^5 + C_5^5 \cdot C_3^5 = 35$

**Ex 41** Le triangle de Pascal  
 $\bullet (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$      $\bullet C_{10}^{14} \cdot x^4 y^{10} = 1'001 \cdot x^4 y^{10}$

**Ex 42** Il s'agit donc de constituer une chaîne d'égalités :

$$C_p^n + C_{p+1}^n = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \left( 1 + \frac{n-p}{p+1} \right) = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p+1+n-p}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{n+1}{p+1} = C_{p+1}^{n+1}$$

**Ex 43**  $C_2^4 = 6$  (pensez au  $\Delta$  de Pascal)

**Ex 44** a)  $C_4^8 = 70$     b)  $3 \cdot 10 = 30$     c)  $3/7 = 42,86\%$

**Ex 45** a)  $40'320$     b)  $50'400$     c)  $16'800$

**Ex 46** a)  $C_3^{36} = 7'140$     b)  $C_1^4 \cdot C_2^4 = 24$     c)  $C_3^{32} = 4'960$   
 d)  $C_3^{36} - C_3^{32} = 2'180$     e)  $C_1^4 \cdot C_2^{32} = 1'984$

**Ex 47**  $\bar{P}_8(2;4;2) = 420$

**Ex 48**  $C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 31$

**Ex 49** a)  $2'673$     b)  $5'832$     c)  $35$

**Ex 50** a)  $120$     b)  $72$     c)  $12$

**Ex 51** a)  $720$     b)  $360$     c)  $60$     d)  $240$     e)  $144$

**Ex 52** a)  $2,0923 \cdot 10^{13}$     b)  $3,2514 \cdot 10^9$     c)  $4,1618 \cdot 10^{11}$

**Ex 53** 8 convives (Il s'agit de résoudre l'équation  $C_2^x = 28$ )

## §1. Premières notions:

### Exercice 1:

- 1)  $U = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$
- 2)  $A = \{PPP; PPF; PFP; PFF\}$
- 3)  $B = \{PPP; PPF; FPP; FPF\}$
- 4)  $\bar{A} = \{FPP; FPF; FFP; FFF\}$
- 5)  $A \cap B = \{PPP; PPF\}$
- 6)  $C = \{FFP; FPF; PFF; FFF\}$

### Exercice 2:

- a) L'ensemble des filles de 1<sup>ère</sup> ou de 2<sup>ème</sup> année.
- b) L'ensemble des filles (du gymnase) n'ayant pas la nationalité suisse.
- c) L'ensemble des garçons de 1<sup>ère</sup> ou 3<sup>ème</sup> année de nationalité suisse.

### Exercice 3:

$\bar{A}$  ;  $\bar{B}$  ;  $\bar{A} \cup \bar{B}$  ;  $\bar{A} \cap \bar{B}$

## §2. Approche intuitive de la notion de probabilité:

### Exercice 4:

- 1)  $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{6840}{15600} \approx 43,85\%$     2)  $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{26 \cdot 25 \cdot 24} = \frac{120}{15600} \approx 0,7692\%$
- 3)  $\frac{1}{15600} \approx 0,0064\%$     4)  $\frac{6}{15600} \approx 0,0385\%$

### Exercice 5:

- 1)  $\frac{6}{16} = 37,5\%$     2)  $\frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 31,25\%$

### Exercice 6:

- 1)  $\frac{210}{1680} = 12,5\%$     2)  $\frac{90}{1680} \approx 5,36\%$     3)  $\frac{360}{1680} \approx 21,43\%$

### Exercice 7:

- 1)  $18,18\%$     2)  $1,01\%$

### Exercice 8:

- 1)  $4,55\%$     2)  $27,27\%$     3)  $38,18\%$     4)  $61,82\%$
- 5)  $74,55\%$     6)  $76,36\%$

### Exercice 9:

- 1)  $22,22\%$     2)  $34,76\%$     3)  $65,24\%$

### Exercice 10:

- 1)  $9,31\%$     2)  $69,09\%$     3)  $30,91\%$

**Exercice 11:**

- 1) 0,033 %                      2) 0,802 %                      3) 0,067 %                      4) 0,134 %  
 5) 0,008 %                      6) 0,006 %                      7) 53,42 %                      8) 46,58 %  
 9) 91,57 %                      10) 9,63 %

**Exercice 12:**

- 1) 4,63 %                      2) 9,26 %                      3) 90,74 %

**Exercice 13:** 20,51 %**§3. Calculs de probabilité en utilisant des diagrammes de Venn:****Exercice 14:**

- 1) 40 %                      2) 70 %

**Exercice 15:**

- 1) 86 %                      2) 6 %                      3) 4 %

**Exercice 16:**

- 1) 1/2                      2) 3/13                      3) 8/13

**Exercice 17:**

- 1) 2300 possibilités                      2) 9,57 %                      3) 50,43 %                      4) 36 %  
 5) 40 %

**Exercice 18:**

- 1)  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$                       2)  $P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

**Exercice 19:**

- 1)  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{7}{50}$  et  $P(C) = \frac{3}{25}$

2)  $P(\text{multiple de 7 ou multiple de 8}) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{7}{50} + \frac{3}{25} - 0 = \frac{13}{50}$

3)  $P(\text{pair ou multiple de 7}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{50} - \frac{3}{50} = \frac{29}{50}$

4)  $P(\text{pair ou multiple de 8}) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{3}{25} - \frac{3}{25} = \frac{1}{2}$

**§4. Calculs de probabilité en utilisant les diagrammes en arbre:****Exercice 20:**  $\frac{35}{768}$ **Exercice 21:**

- 1) 58 %                      2) 49 %                      3) 79 %

**Exercice 22:**

- 1) 60 %                      2) 40 %

**Exercice 23:**

- 2) 2,16 %                      3) 97,84 %                      4) 25,68 %

**Exercice 24:** 56 %**Exercice 25:** 98,35 %**Exercice 26:**

- 1)  $\frac{1}{10}$                       2) 5,90 %                      3) 27,1 %

**§5. Épreuves de Bernoulli****Exercice 27:** 2,56 %**Exercice 28:** 36,72 %**Exercice 29:**

En fait, il s'agit de se convaincre que  $\overline{P}_n(k; n-k) = C_k^n$

**Exercice 30:**

- 1) 27,87 %                      2) 99,93 %                      3) au moins 4 flèches (solution de  $(0,4)^x < 0,05$  avec  $\log$ )

**§6. Et si l'inconnue n'est plus la probabilité, mais la taille de l'arbre****Exercice 31:** au moins 52 élèves (solution de  $(14/16)^x < 0,001$  avec  $\log$ )**Exercice 32:** Il devra faire au moins 5 placements.**§7. Probabilité conditionnelle et événements indépendants****Exercice 33:**

- 1) 7/23                      2) 7/22                      3) 1/2                      4) 17/22                      5) 13/19

**Exercice 34:**

- 1.a) 8 %                      1.b) 6 %                      1.c) 14 %                      2) 42,86 %                      3) 20 %

**Exercice 35:**

- 1)  $\frac{3}{8}$                       2)  $\frac{1}{4}$

**Exercice 36:**

- $\frac{1}{9}$                        $\frac{3}{4}$                        $\frac{1}{12}$                       1

**Exercice 37:**

- 1) 23,96 %                      2) 62,44 %                      3) 17 %

**Exercice 38:** 37,5 %

**Exercice 39:**

- 1)  $U = \{FFF; FFP; FPF; PFF; FPP; PFP; PPF; PPP\}$
- 2)  $P(B) = 4/8, P(B|A) = 2/4, P(A) = 4/8$  et  $P(A \cap B) = 2/8$
- 3) Deux justifications possibles:  $P(A \cap B) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(B)$  ou  $P(B|A) = 1/2 = P(B)$

**Exercice 40:**

- 1)  $P(\text{allemand et Tennis}) = 33/150, P(\text{allemand}) \cdot P(\text{Tennis}) = 26/125$ .  
Ces événements ne sont donc pas indépendants.
- 2)  $P(\text{anglais et Voile}) = 9/50, P(\text{anglais}) \cdot P(\text{Voile}) = 9/50$ .  
Ces événements sont donc indépendants.

**§8. Un petit mélange****Exercice 41:**

- 1)  $58\% = 48\% + 10\%$  (somme de 2 branches)
- 2)  $28,57\%$
- 3)  $80\%$  (correspond directement à la valeur sur une branche)

**Exercice 42:** 21,67 %**Exercice 43:**

- 1)  $P(A) = 3/4, P(B) = 1/2, P(A \cap B) = 3/8$ . On a bien  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .
- 2)  $P(A) = 1/2, P(B) = 3/4, P(A \cap B) = 1/2$ . Ces événements sont donc dépendants.

**Exercice 44:**

- 1)  $8,33\%$
- 2)  $91,67\%$

**Exercice 45:**

- 1)  $P(\text{as} - \text{as} | \text{as} - \text{roi ou as} - \text{as}) = \frac{P(\text{as} - \text{as})}{P(\text{as} - \text{roi ou as} - \text{as})} = \frac{C_2^4}{C_1^4 \cdot C_1^4 + C_2^4} = 27,27\%$
- 2)  $P(\text{as} - \text{as} | \text{asr} - \text{autre ou asr} - \text{asr}) = \frac{P(\text{asr} - \text{asr ou asr} - \text{asn})}{P(\text{asr} - \text{autre ou asr} - \text{asr})} = \frac{C_2^2 + C_1^2 \cdot C_1^2}{C_1^2 \cdot C_1^6 + C_2^2} = 38,46\%$
- 3)  $P(\text{as} - \text{as} | \text{asc} - \text{autre}) = \frac{P(\text{asc} - \text{as})}{P(\text{asc} - \text{autre})} = \frac{C_1^1 \cdot C_1^3}{C_1^1 \cdot C_1^7} = 42,86\%$

**Exercice 46:**

- 1)  $1,9\%$
- 2)  $92,11\%$
- 3) 23 véhicules

**Exercice 47:**

$$1) p = \frac{C_2^6 + C_2^n + C_2^{24-n}}{C_2^{30}} = \dots = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}$$

- 2)  $n = 12$  pièces de 2 francs
- 3)  $n = 1$  ou  $n = 23$  pièces de 2 francs.

*Si vous avez obtenu  $n = 0$  ou  $n = 24$ , je vous propose de relire attentivement la donnée...*