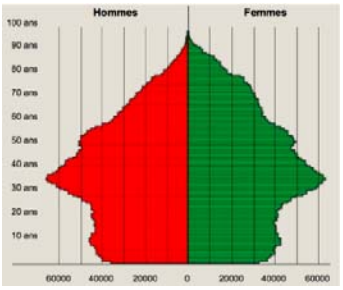
Chapitre 1: Présentation des données (à la main)

§1.1 Introduction, un peu d'histoire:

Introduction

Le mot statistique – de l'italien « statista », homme d'État – désignait à l'origine la collecte et l'évaluation des données concernant un État. Cette science de l'État était une représentation purement descriptive de faits géographiques et sociaux comme le climat, la population, les coutumes, les organisations économiques, etc…, à l'usage des hommes d'État ; à l'époque en France le roi et son conseil.



Pyramide des âges
Suisse 2000

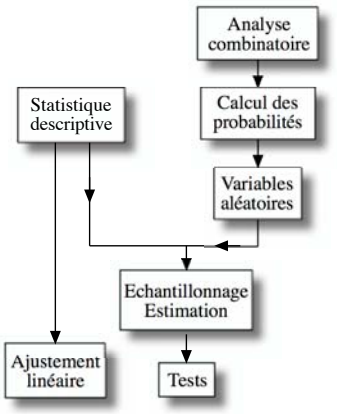
Dès la plus haute Antiquité, les dirigeants ont fait procéder à des enquêtes sur la population: l'Empereur Yao (vers 2200 av. J.-C.) pour connaître les productions agricoles, les pharaons égyptiens (dès 1700 av. J.-C.), l'Empereur Auguste à Rome pour le nombre de soldats, les revenus des citoyens.

Une page des données de l'astronome Tycho Brahe

Nous trouvons également de multiples exemples d'utilisation de statistiques dans les sciences :

- *Johannes Kepler (1571-1630) formula ses lois sur les mouvements des planètes en utilisant l'ensemble des données récoltées par l'astronome danois Tycho Brahe (1546-1601).*
- *Les premières études statistiques de Florence Nightingale, infirmière anglaise durant la guerre de Crimée de 1854 à 1856. permirent d'identifier les causes de mortalités des soldats et conduisirent à l'amélioration des conditions d'hygiène des hôpitaux militaires anglais.*

Aujourd'hui, cette partie des mathématiques a pris une grande place grâce aux nouvelles techniques et à la puissance des ordinateurs. Géographie, médecine, sciences humaines, sciences économiques, biologie, politique, aucun domaine n'est épargné.



On peut décomposer la méthode statistique en cinq étapes:

1. Identification précise de la population et du (des) caractère(s) à étudier
2. Récolte des données (recensement ou échantillonnage)
3. Regroupement, classification et présentation des données (statistiques descriptives)
4. Comparaison avec des modèles théoriques (calcul des probabilités et modèles probabilistes)
5. Interprétation, conclusion, prévision (inférence statistique)

§1.2 Vocabulaire:

En statistique, le mot **population** représente un ensemble d'objets de même nature que l'on va étudier, analyser. Les éléments de la population, appelés **individus**, peuvent être des personnes, mais aussi des choses, des animaux, des objets, des faits, des notes de TE, etc... Le nombre d'individus est appelé l'**effectif** (ou encore la fréquence absolue).

*Souvent, il n'est pas possible de prendre en compte la totalité de la population. Dans ces cas, l'étude se limite à un **échantillon**, pris au hasard, à partir duquel on peut tenter de déduire une tendance pour toute la population.*

Une population doit toujours être clairement définie afin que l'on puisse toujours déterminer si un élément quelconque fait ou non partie de la population étudiée. On pourra ainsi étudier une caractéristique que possède chacun des individus on appelle cela une **variable statistique (v.s)**.

Les différentes valeurs que peut prendre une variable statistique sont les **modalités** de cette variable.

Notation : On note une v.s par une lettre majuscule X, Y, … et ses modalités par la même lettre minuscule affectée d'indices : x_1, x_2, … pour la variable X ou y_1, y_2, … pour la variable Y.

Modèle 1 : On fait une étude statistique auprès des élèves du gymnase de Morges. On aimerait connaître le sexe, l'âge au 1er janvier, la taille, la voie (ECG, EC ou EM) de chaque élève.

Population :

v.s	modalité des v.s
X :	$x_1 =$ $x_2 =$
Y :	$y_1 =$ $y_2 =$ $y_3 =$ $y_4 =$ $y_5 =$
Z :	$z_i \in [\quad ; \quad]$
U :	$u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

Une v.s. est **quantitative** si les valeurs qu'elle peut prendre sont **numériques**. Une telle v.s est dite **quantitative discrète** si les valeurs qu'elle peut prendre sont isolées les unes des autres. Par contre, si celles-ci constituent des intervalles de nombres, la v.s est appelée **quantitative continue**. Si les valeurs d'une v.s sont descriptive ou nominative, elle est dite **qualitative**.

X est une v.s ……, Y est une v.s ……

Z est une v.s ……, U est une v.s ……

Exercice 1.1: On a demandé aux employés d'une entreprise pour quel parti politique ils avaient voté lors des dernières élections. Voici les données brutes obtenues:

PS	PRD	PS	PDC	PS	UDC
PS	UDC	PRD	PS	verts	PDC
UDC	PRD	verts	UDC	UDC	UDC
PRD	PS	PRD	PDC	PRD	PDC
UDC	PDC	PS	UDC	UDC	UDC

a) Identifier la population.
b) Identifier la variable statistique (v.s.).
c) Donner l'ensemble des modalités.
d) De quel type est cette variable statistique ?

Exercice 1.2: Un professeur de l'Uni a noté le nombre de points (strictement positif) obtenus par 80 étudiants lors d'un test de statistiques.

2	3	5	5	4	6	6	5	4	3
7	7	7	6	2	7	7	9	8	10
5	6	6	8	6	6	3	7	3	5
9	7	6	4	7	5	9	9	6	9
6	3	9	8	8	7	5	6	10	6
9	7	7	7	4	7	10	8	7	10
3	5	8	5	8	7	4	8	10	7
4	6	6	8	7	7	7	8	8	9

a) Identifier la population.
b) Identifier la variable statistique (v.s.).
c) Donner l'ensemble des modalités.
d) De quel type est cette variable statistique ?

Modèle 2 : En reprenant les données de l'exercice 1.1, on va sacrifier le caractère individuel de l'information afin d'obtenir un portrait d'ensemble. On calcule pour chaque modalité le nombre d'individus ayant cette modalité : l'**effectif** de la modalité. Celui-ci ne permet pas de comparer deux populations inégales. Il sera alors naturel de calculer la proportion de la population qui a une telle modalité. On définit alors la **fréquence relative** par le rapport entre l'effectif de chaque modalité et le nombre d'individus de la population.

Modalité x_i	**Effectif** n_i	**Fréquence relative** f_i
PS		
PRD		
PDC		
UDC		
Verts		
Total:		

Le **tableau de distribution des effectifs et des fréquences** permet une bonne synthèse des informations, mais n'est pas très explicite. On l'accompagnera d'un graphique permettant de représenter ces données. On utilise fréquemment :

a) un diagramme en colonnes (histogramme)

b) un diagramme en secteurs (en "camembert")

Remarques :

- La somme des effectifs est toujours égale au nombre d'individus de la population:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = N$$

- La somme des fréquences est toujours égale à 1:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

car:

Il arrive que la somme des fréquences ne soit pas exactement égale à 1 à cause des arrondis de calculs.

Exercice 1.3: Reprendre les données de l'exercice 1.2 afin d'en proposer :
a) le tableau de distribution des effectifs et des fréquences ;
b) un histogramme puis un diagramme en secteurs.

Exercice 1.4: On a demandé aux enfants de trois classes de 3ème année primaire quel était leur sport d'hiver préféré. On a obtenu les données brutes suivantes:

Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Hockey	Ski	Hockey	Ski	Raquette
Patinage	Ski	Ski	Hockey	Ski
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Ski
Patinage	Ski	Hockey	Raquette	Raquette
Ski	Glissade	Hockey	Glissade	Glissade
Hockey	Glissade	Hockey	Hockey	Hockey
Ski de fond	Hockey	Patinage	Patinage	Hockey
Ski	Hockey	Ski	Raquette	Patinage
Hockey	Glissade	Ski	Ski	Ski de fond
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Hockey
Hockey	Patinage	Ski	Patinage	Raquette

a) Identifier la population.
b) Caractériser la variable statistique.
c) Donner l'ensemble des modalités.
d) Le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.
e) Faire un diagramme en secteurs.

Exercice 1.5: On étudie l'état civil des 30 employés (numérotés de 1 à 30) d'une petite entreprise.

1	Marié	11	Marié	21	Célibataire
2	Mariée	12	Célibataire	22	Marié
3	Célibataire	13	Marié	23	Veuf
4	Divorcé	14	Veuve	24	Célibataire
5	Marié	15	Marié	25	Divorcée
6	Célibataire	16	Divorcé	26	Divorcé
7	Célibataire	17	Célibataire	27	Marié
8	Mariée	18	Mariée	28	Marié
9	Mariée	19	Marié	29	Marié
10	Divorcée	20	Marié	30	Marié

a) Identifier la population
b) Caractériser la variable statistique
c) Donner l'ensemble des modalités
d) Le tableau des distributions des effectifs et des fréquences
e) Faire un histogramme (des effectifs)
f) Faire un **histogramme des fréquences**.
g) Que constatez-vous

§1.3 Regroupement des données à l'intérieur de classes de valeurs

Souvent, lors d'une étude statistique portant sur une variable statistique quantitative discrète ou continue, les données recueillies diffèrent à peu près toutes les unes des autres et sont étalées sur un large intervalle de valeurs. L'objectif de la statistique descriptive étant de résumer de la façon la plus adéquate possible cet ensemble de données, nous procédons alors à un regroupement de ces dernières à l'intérieur de classes, c'est-à-dire de sous-intervalles de valeurs. Les règles suivantes permettent de choisir judicieusement ces classes :

- On fixe un nombre de classes entre 5 et 15. Le nombre de classes dépend de la taille de la population et il faut éviter, si possible, des fréquences de classes trop petites. En cas de difficultés pour fixer ce nombre de classes k, on peut utiliser la règle de Sturges:

$$k = \left[1 + 3{,}322 \cdot \log(N)\right]$$

- Les intervalles sont du type $[b_{i-1}\,;\,b_i[$.

  b_{i-1} est **la borne inférieure** de la classe i;

  b_i est **la borne supérieure** de la classe i;

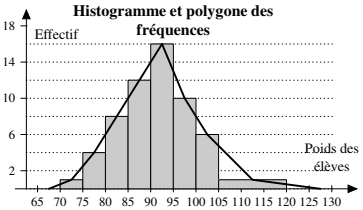
  $x_i = \dfrac{b_{i-1} + b_i}{2}$ est **le milieu** de la classe i;

  $L_i = b_i - b_{i-1}$ est **la largeur** (ou amplitude) de la classe i.

- En principe, on fixe les bornes des intervalles de telle sorte que ces derniers soient d'égales largeurs. Les bornes doivent permettre des calculs simples.
- Si on doit vraiment utiliser des classes de largeur inégales, on place les classes de largeur égale au centre de la distribution.

Représentations graphiques:

- L'**histogramme** est un diagramme en colonnes où les rectangles sont juxtaposés. En effet, les modalités sont ici remplacées par des classes et celles-ci sont formées d'intervalles successifs de sorte qu'il n'y a plus lieu de séparer ces rectangles.



- Le **polygone des fréquences** est la ligne polygonale obtenue en joignant les points milieux consécutifs des sommets des rectangles de l'histogramme. On commence et on termine le polygone des fréquences en ajoutant une classe de fréquence nulle avant la première classe et une autre après la dernière classe.

Modèle 3 : Des chimistes viennent de composer une nouvelle fibre synthétique qui devrait se caractériser par sa résistance. Afin de vérifier sa capacité de tension, on prélève de la production, au hasard, un échantillon de 60 fibres qu'on soumet à des essais de résistance. Les résultats (en kg) sont les suivants :

79	100	86	76	91	86	95	81	89	48	97	75	71	53	83
88	85	104	87	81	91	84	77	97	87	69	69	79	89	86
83	89	84	89	103	88	63	94	82	97	75	82	80	71	80
78	73	77	65	99	114	87	74	85	35	81	72	80	81	99

a) On se propose de regrouper les données en 6 classes d'amplitude 15 avec 30 comme valeur minimale. Justifier ce choix.

b) Effectuer l'histogramme.

c) Construire le polygone des fréquences.

Classe	Centre	Effectif	Fréquence
	Totaux		

Exercice 1.6: Une entreprise a enregistré le salaire (en Frs) de tous ses vendeurs pour l'année dernière. Voici les données rangées:

10520	20420	24150	26390	27880	32110	34620	38350
14310	20630	24420	26510	28000	32430	35270	39240
16020	21110	24530	26520	29080	32480	35890	39810
16670	21350	24910	26710	29160	32610	36100	40700
17220	21790	25080	27400	29770	33720	36440	41660
18450	22500	25160	27550	30330	33740	36540	41720
19160	22630	25900	27630	30410	33740	36660	42600
19320	22910	26220	27660	30720	34220	37390	44310
19470	23400	26250	27790	31650	34570	37650	46270
19710	23820	26340	27840	31820	34620	38200	48340

a) Identifier la population.
b) Identifier la variable statistique.
c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?
d) Regrouper ces données en 8 classes de largeur 5000 avec 10000 comme valeur minimale.
e) Construire le tableau des distributions des effectifs et des fréquences.
f) Faire un histogramme.
g) Construire le polygone des fréquences.

Exercice 1.7: En recevant les élèves qui désirent faire partie d'une équipe de rugby du gymnase, l'entraîneur a pris note du poids de ces 60 joueurs:

72,6	81,9	84,7	88,1	89,4	91,6	93,7	95,8	99,1	103,2
75,8	82,6	85,4	88,1	90,2	92,4	93,9	96,6	99,4	103,9
77,5	82,9	86,2	88,3	90,9	92,5	94,4	97,1	99,8	104,0
78,3	83,0	86,9	88,7	91,1	92,8	94,7	97,2	100,4	105,2
79,6	83,5	87,3	89,0	91,2	93,0	94,8	97,5	101,7	106,1
81,5	84,1	87,8	89,1	91,3	93,3	95,2	98,3	102,1	118,7

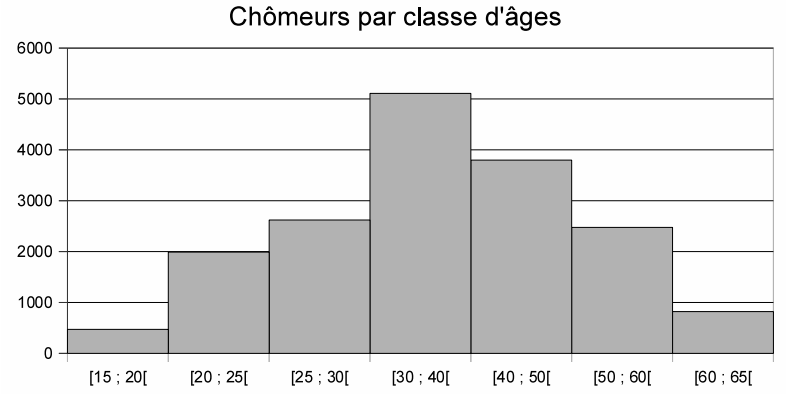
a) Identifier la population.
b) Identifier la variable statistique.
c) Cette variable statistique est-elle discrète ou continue ?
d) En utilisant des classes de largeur 5, construire le tableau des distributions des effectifs et des fréquences (valeur minimale: 70). Vous admettrez une classe plus large à l'extrémité (classe [105 ; 120[ ),
e) Construire le polygone des fréquences.

Exercice 1.8: Le tableau récapitulatif suivant donne la statistique trimestrielle par classe d'âges des chômeurs inscrits dans un office du travail dans le canton de Vaud en juin 2009:

Chômeurs par classe d'âges

Classe d'âges	Effectif	Fréquence [%]
[15 ; 20[	472	2,73
[20 ; 25[	1'990	11,51
[25 ; 30[	2'621	15,16
[30 ; 40[	5'110	29,56
[40 ; 50[	3'798	21,97
[50 ; 60[	2'476	14,32
[60 ; 65[	821	4,75
Totaux	17'288	100

a) En quoi l'histogramme suivant est-il trompeur ?



b) Proposer un nouvel histogramme corrigeant cet effet visuel trompeur.

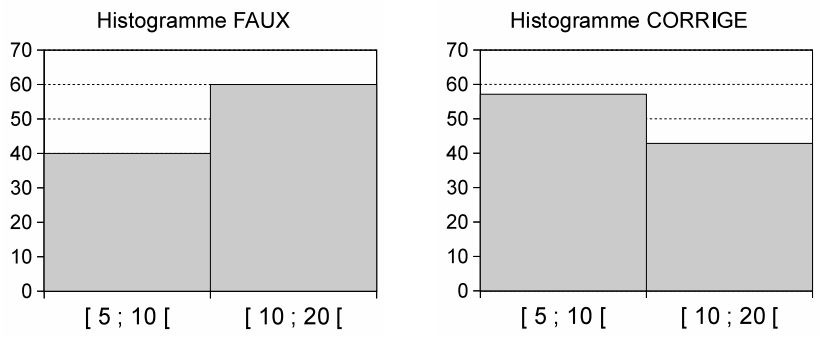
Convention: L'aire de chaque rectangle de l'histogramme doit être proportionnelle à la fréquence de la classe correspondante. Ce principe de proportionnalité doit être respecté même dans le cas de classes de largeurs inégales.

Classe d'âges	Effectif	Fréquence [%]
[5 ; 10[	8	40
[10 ; 20[	12	60
Totaux	20	100

devient

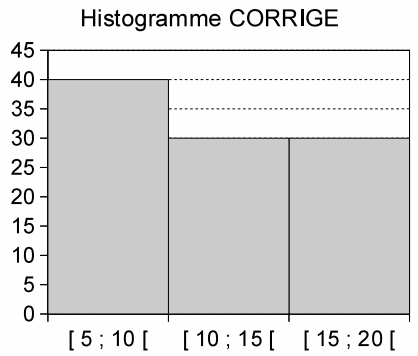
Classe d'âges	Effectif	Fréquence [%]	Largeur des classes	"Densité"	"Fréquence" corrigée [%]
[5 ; 10[	8	40	5	1,6	57,14
[10 ; 20[	12	60	10	1,2	42,86
Totaux	20	100		2,8	100

Voici les 2 histogrammes:



Une deuxième démarche possible est de modifier le "découpage" en classes afin qu'elles aient toutes la même largeur. Il s'agira donc d'adapter proportionnellement les effectifs. On obtient alors:

Classe d'âges	**Effectif**	**Fréquence [%]**
[5 ; 10[	8	40
[10 ; **15**[	**6**	**30**
[**15** ; 20[	**6**	**30**
Totaux	20	100



Exercice 1.9: Justifier l'affirmation suivante:

L'aire totale des rectangles de l'histogramme est la même que l'aire totale sous le polygone des fréquences si toutes les classes ont la même largeur.

§1.4 Fréquences cumulées des v.s. quantitatives

Dans une étude statistique, si on souhaite connaître la proportion de chaque valeur que peut prendre la variable statistique étudiée, on regarde sa **fréquence f_i**.

Si par contre on souhaite connaître la proportion des individus qui présentent des valeurs inférieures à une valeur fixée, on regarde la **fréquence cumulée croissante F_i**.

Pour visualiser la proportion des individus qui présentent des valeurs supérieures ou égales à une valeur fixée, on étudiera alors la **fréquence cumulée décroissante F'_i**.

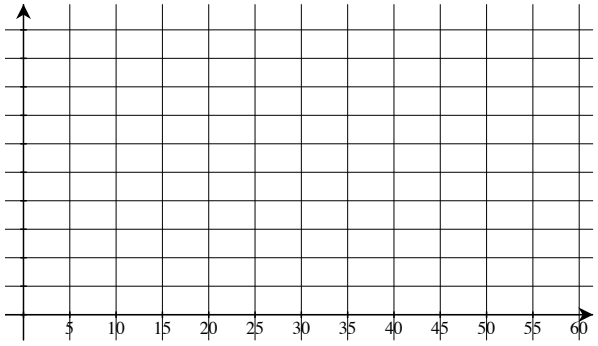
Observons ceci sur le modèle suivant :

Modèle 4 : Lors d'un concours de pêche dans le lac de Bret, on mesuré (en cm) toutes les prises et regroupées par classe dans le tableau qui suit :

a) Compléter le tableau que l'obtenu :

Classe $[b_{i-1} ; b_i[$	**Centre** x_i	**Effectifs** n_i	**Fréquence** f_i	**Fréquence cumulée croiss** F_i	**Fréquence cumulée décroiss** F'_i
[10 ; 15[		4			
[15 ; 20[		8			
[20 ; 25[	22,5	21	32,81 %		
[25 ; 30[	27,5	18	28,13 %		
[30 ; 35[	32,5	7	10,94 %		
[35 ; 40[	37,5	5	7,81 %		
[40 ; 60[	50	1			
	Totaux :		100 %		

b) Représenter le diagramme des fréquences cumulées.



c) Déterminer la proportion des prises dont la longueur est plus petite que 30 cm.

d) Déterminer la proportion des prises dont la longueur est plus grande ou égale à 20 cm.

La médiane : Le point d'intersection des deux courbes des fréquences cumulées correspond à la valeur de la variable qui partage la population en deux parties égales: **La médiane**.

Dans le modèle précédent, la médiane vaut:

Exercice 1.10: Compléter la solution de l'exercice 1.8 par:

c) Représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes et en déduire la valeur de la médiane.
d) Déterminer la proportion de chômeurs de moins de 40 ans.
e) Déterminer la proportion de chômeurs de plus de 20 ans.
f) Déterminer la proportion des chômeurs entre 20 et 40 ans.

Exercice 1.11: Lors d'un cours de statistique, en 2008, 20 étudiants ont été invités à indiquer leur taille et leur poids.

N° d'ordre	taille en cm.	poids en kg
1	174	64
2	175	59
3	180	64
4	168	62
5	175	51
6	170	60
7	170	68
8	160	63
9	187	93
10	178	70

N° d'ordre	taille en cm.	poids en kg.
11	170	64
12	182	72
13	168	60
14	171	55
15	181	80
16	178	82
17	180	72
18	180	78
19	178	71
20	182	72

a) Regrouper les données de tailles et de poids en 6 classes de largeur égale.
b) Représenter l'histogramme et le polygone des fréquences des tailles des 20 étudiants.
c) le diagramme des fréquences cumulées des poids des 20 étudiants.