Chapitre 3: La démonstration par récurrence

3.1 Un exemple pour comprendre le principe

Introduction : Pour découvrir une formule donnant **la somme des *n* premiers nombres impairs**, on commence par quelques essais

Si $n = 1$: $1 = 1$

Si $n = 2$: $1 + 3 = 4$

Si $n = 3$: $1 + 3 + 5 = 9$

Si $n = 4$: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Il semblerait que cette somme soit toujours égale au carré du nombre de termes, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 2$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Mais comment en être certain? Un plus grand nombre d'essais confirme cette conjecture; il restera cependant toujours une infinité de cas non vérifiés[1]. Le raisonnement qui suit permettra de procéder à cette vérification en un temps record, puisque fini :

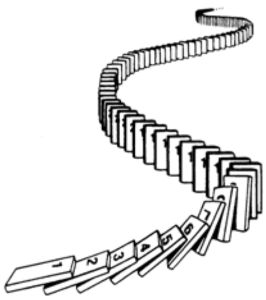
Supposons que la formule $1 + 3 + 5 +... + (2n - 1) = n^2$ soit vraie pour une valeur de n, ce qui est le cas pour $n = 4$, par exemple. En additionnant $2n + 1$, le nombre impair suivant, on obtient :

$$1 + 3 + 5 +... + (2n - 1) + \mathbf{(2n + 1)} = n^2 + \mathbf{(2n + 1)}$$

on observe que le membre de droite de l'égalité vaut justement $(n + 1)^2$. La formule est encore vraie pour $n + 1$; elle est donc vraie pour $n = 5$. La formule étant maintenant prouvée pour $n = 5$, le même raisonnement montrera qu'elle est encore vraie pour $n = 6$, puis pour $n = 7$… . Le passage de n à $n + 1$ fonctionne comme un moteur qui vérifie "automatiquement" la formule pour toutes les valeurs de n supérieures à 4.

De manière générale, on caractérise le **raisonnement par récurrence** de la manière suivante:

> Soit $p(n)$ une condition pour la variable $n \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer que la proposition $\forall n \in \mathbb{N}^*, p(n)$ est vraie, on montre que
>
> **1**. $p(1)$ est une proposition vraie
>
> **2**. $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ pour tout $\forall n \geq 1$



On peut comparer une démonstration par récurrence au jeu qui consiste à faire tomber une file de pièces de dominos :

Considérons une rangée infinie de dominos, étiquetés $1, 2, \ldots, n, \ldots$ où chaque domino est en position verticale.

Soit $p(n)$ la proposition "on fait tomber le domino n".

Si on arrive à faire tomber le premier domino, autrement dit $p(1)$ est vraie et si, peu importe quand le $n^{\text{ième}}$ domino est poussé, il fait tomber le $(n + 1)^{\text{ième}}$ domino c'est-à-dire $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ est vraie, alors tous les dominos peuvent tomber les uns après les autres.

[1] Jusqu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens n'hésitaient pourtant pas à recourir à un tel raisonnement "par induction", couramment utilisé dans les sciences expérimentales.

Exemple : Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Marche à suivre : Pour effectuer une démonstration par récurrence, il faut :

1°) **Vérifier** que la proposition est **vraie pour $n = 1$** ;
2°) **Poser l'hypothèse de récurrence**, c'est-à-dire affirmer, par hypothèse, que la proposition est vraie pour n.
3°) **Formuler la conclusion**, c'est-à-dire adapter la formule pour $n + 1$
4°) Effectuer le **raisonnement** permettant de "passer de n à $n + 1$".

Exercice 3.1 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) En comparant les réponses a) et c), compléter cette célèbre

égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\cdots}=\left(\sum\ldots\right)^{\cdots}$

Exercice 3.2 : Effectuer les sommes suivantes :

$\dfrac{1}{1\cdot 2}=\ldots$

$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}=\ldots$

$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}=\ldots$

$\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}=\ldots$

À l'aide de ces résultats, conjecturer une formule donnant la somme suivante, puis démontrer votre conjecture.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Exercice 3.3 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n}{2n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=2-\frac{n+2}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\cdot 5^i=\frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)(i+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 3.4 : Établir une formule pour :

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n},$$

puis la démontrer.

Exercice 3.5 : **a)** Montrer que si l'égalité $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2$ est vraie pour $n=k$, alors elle est vraie pour $n=k+1$.

b) Peut-on alors affirmer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{8}(2n+1)^2\ ?$$

Exercice 3.6 : Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{i}\right)=n+1$$

Indication : Le symbole $\prod$ indique non pas une somme, mais un ***p****roduit des (1 + 1/i) pour i allant de 1 jusqu'à n.*

Exemple : Démontrer par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 4^n-1 \text{ est divisible par } 3$$

Exercice 3.7 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

a) $8^n - 1$ est divisible par 7.

b) $n^2 + 5n$ est un nombre pair.

c) $n^3 + 5n$ est un multiple de 3.

Exercice 3.8 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ que :

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} \text{ est un multiple de } 5$$

Exercice 3.9 : **a)** Démontrer par récurrence la formule suivante :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

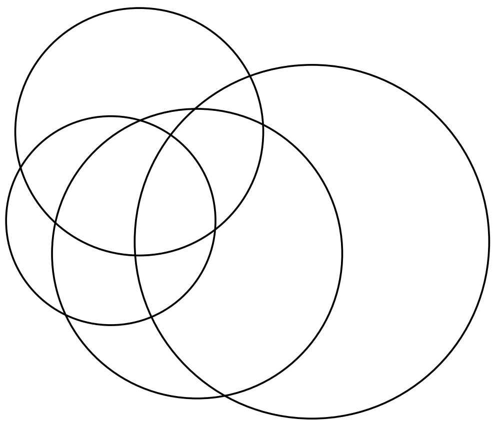
b) Cette formule, ne l'avions-nous pas déjà démontrée ?

Exercice 3.10 : Démontrer que la proposition suivante est fausse:

$$\text{"}\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - n + 41 \text{ est premier"}$$

Indication : Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de n, ne vérifiant pas la proposition.

Exercice 3.11 : On considère n cercles dans le plan de sorte que le nombre de points d'intersection de ces cercles deux à deux soit le plus grand possible. Déterminer en fonction de n le nombre de ces points d'intersection. Justifier tout ce que vous affirmez.



Exemple : Soit $x \in\ ]-1\ ;+\infty[$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \textit{(Inégalité de Bernoulli)}$$

Jacques Bernoulli
1654 – 1705

Exercice 3.12 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq 2^n$.

Exercice 3.13 : Démontrer[1] que $\forall n$ entier plus grand que 1, on a $n! < n^n$.

Remarque : Soit j un entier positif, et supposons qu'à chaque entier $n \geq j$ est associé une proposition $p(n)$, le principe de preuve par **récurrence** peut être **étendu** pour englober cette situation. Pour démontrer que la proposition $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq j$, nous employons les deux étapes suivantes, de la même manière que vous l'avons fait pour $n \geq 1$.

1. $p(j)$ est une proposition vraie

2. $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ pour tout $\forall k \geq j$

Exercice 3.14 : Calculer le plus petit entier positif j pour lequel la proposition est vraie. Appliquer alors le principe de récurrence étendu pour démontrer cette proposition.

a) $n + 12 \leq n^2$ **b)** $2n + 2 \leq 2^n$

[1] On rappelle que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ 2 \cdot 1$, expression que l'on appelle ***n* factorielle** ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).

3.2 Retour aux suites

Exercice 3.15 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{n}{3n+1}$.

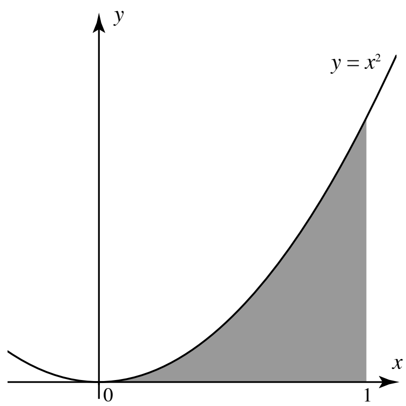
Exercice 3.16 : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie de manière récursive par :

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$

Deviner une expression pour le terme général puis la démontrer par récurrence.

Question : Comment calculer l'aire grisée située sous la parabole $y = x^2$?



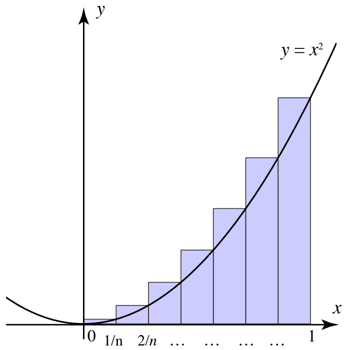
Méthode : **Les tranches de Tabit Ibn Qurra (908 – 946)**

Les mathématiciens arabes du X$^{\text{ème}}$ siècle connaissaient très bien les formules donnant la somme des entiers, des carrés ou des cubes… :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

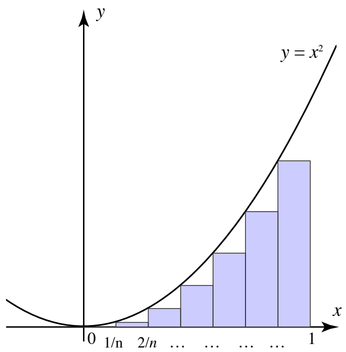
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

Ils eurent donc l'idée de découper en n tranches verticales la partie dont on cherche à calculer l'aire.

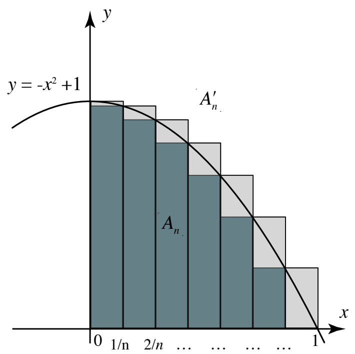


ainsi la somme des aires des n petites tranches d'épaisseur 1/n (que l'on appelle **somme supérieure**) vaut :

Exercice 3.17 : Appliquer une démarche comparable pour la **somme inférieure** suggérée par la figure ci-dessous.



Exercice 3.18 : On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère.



Pour cela, on a divisé l'intervalle [0 ; 1] en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n (somme inférieure) et l'aire A'_n (somme supérieure).

a) Calculer A_n et A'_n

b) Calculer A_n et A'_n pour $n = 10$, 10^2 puis 10^{10}. Quel résultat semble se dégager ?

c) Justifier ce résultat par un calcul afin d'en déduire la valeur de A.