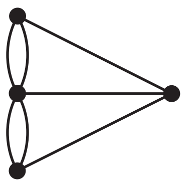
Chapitre 1: Introduction

Introduction

Plan de la vieille ville



Le graphe de la situation

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII^{ème} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX^{ème} siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, Internet, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, …

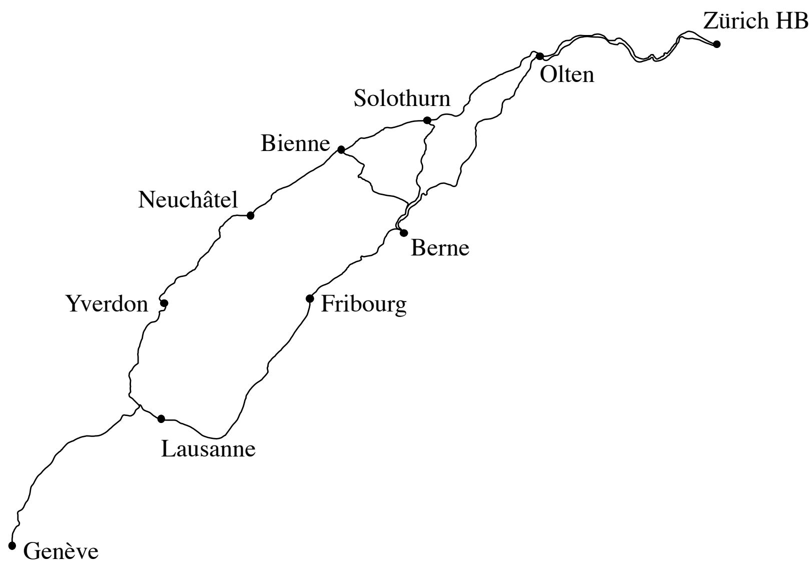
Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

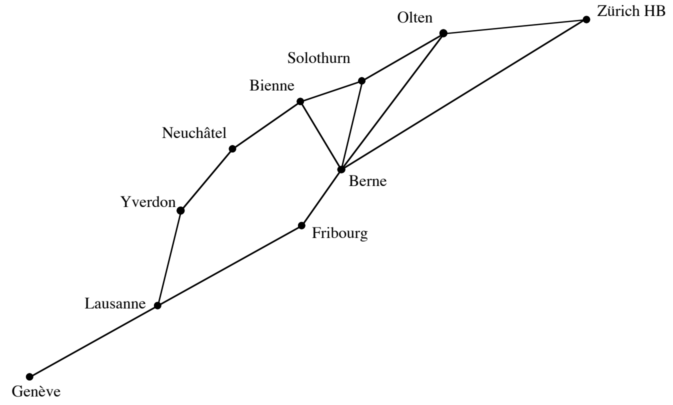
Types de graphes

Les différents types de graphes seront présentés en montrant comment chacun permet de modéliser une liaison ferroviaire entre Genève et Zürich (situation datant du début des années 2000 !!!).

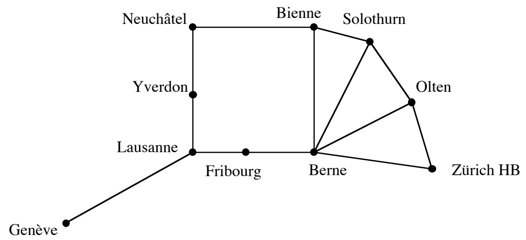
Les villes correspondront aux sommets du graphe et les liaisons correspondront aux arêtes (ou aux arcs).



Cette 1ère représentation est proposée par les CFF. Elle permet de voir les liaisons, mais est relativement compliquée à reproduire. On lui préférera la représentation suivante:

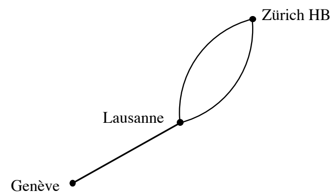


Les liaisons ferroviaires sont alors modélisées en utilisant **un graphe simple**. Celui-ci peut prendre plusieurs allures différentes:



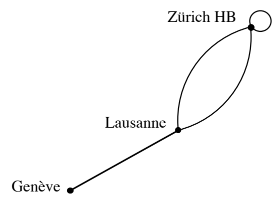
Cette deuxième représentation est équivalente à la première, aucune liaison n'a été modifiée. On dira que ces deux graphes sont **isomorphes**.

On constate qu'il existe **deux** liaisons directes entre Genève et Zürich HB. On pourrait alors simplifier le graphe en proposant:

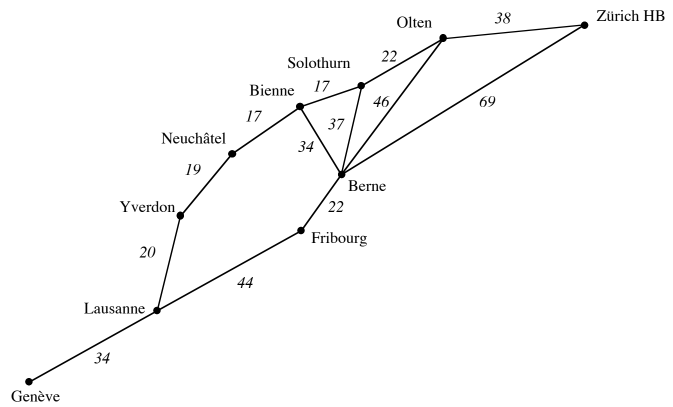


Cela peut se produire lorsque le volume des passagers devient trop important, ce qui était le cas par la liaison passant par Berne. Un tel graphe s'appelle un **multigraphe**.

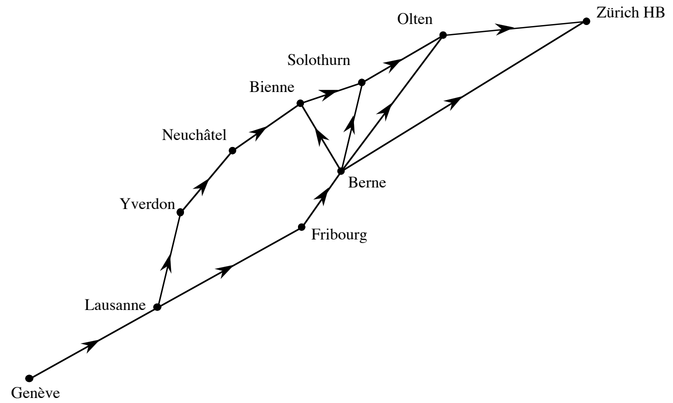
On pourrait encore imaginer que les CFF proposent aux touristes une visite commentée de Zürich. Ils organiseraient alors une boucle en bus privé depuis la gare pour visiter les monuments principaux. Il s'agirait alors d'un **pseudographe**:



On pourrait maintenant s'intéresser à la durée d'un voyage reliant Genève à Zürich, ainsi que la durée des différentes étapes nécessaires. On obtient alors un **graphe pondéré**:



La question du trajet le plus court reliant Genève et Zürich se posera alors naturellement.
Nous n'avons jusqu'ici pas codé le sens du trajet. Si celui-ci a de l'importance, nous utiliserons un **graphe orienté**:



On pourrait encore représenter un multigraphe orienté ou un pseudographe orienté.

Dans cet exemple, la représentation en graphe (orienté ou non) est naturelle. Dans les exercices ci-dessous, il sera important de bien caractériser ce que représentent les sommets ainsi que les arêtes des graphes à proposer. Nous avons vu également qu'une même situation peut être représentée par des graphiques isomorphes. Il est judicieux de choisir la représentation la plus "simple" possible.

Exercice 1 Construire un graphe concernant la compétition entre six espèces d'oiseaux dans le cas où les grives sont en compétition avec les rouges-gorges et les geais, les rouges-gorges le sont avec les oiseaux moqueurs, les oiseaux moqueurs le sont également avec les geais, et les moineaux le sont avec les pics-bois.
(Ce graphe montre l'interaction entre divers oiseaux qui sont en compétition pour les mêmes ressources alimentaires dans un écosystème. Il s'appelle **le graphe de niche écologique**).

Exercice 2 Des études comportementales démontrent que certaines personnes peuvent influencer le comportement des autres. Un graphe appelé **graphe d'influence** sert à modéliser cette situation:

a) Représenter le graphe d'influence de:

Déborah influence Bastien, Frédéric et Linda, mais que personne n'influence Déborah elle-même. De la même façon, Yvonne et Bastien s'influencent mutuellement.

b) De quel type de graphe s'agit-il ?

Exercice 3 Dans un tournoi de football, les Tigers ont battu les Blue Jays, les Cardinals et les Orioles ; les Blues Jays ont battu les Cardinals et les Orioles ; et les Cardinals ont battu les Orioles.

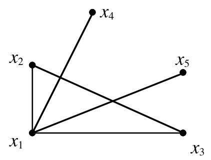
a) Représenter le graphe du tournoi.
b) De quel type de graphe s'agit-il ?

Exercice 4 Construire un graphe dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 8 et dont les arcs représentent la relation "être diviseur de".
De quel type de graphe s'agit-il ?

Chapitre 2: Définitions et quelques exemples

2.1 Définitions formelles

Définition



$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

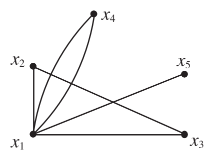
$A = \big\{\{x_1, x_2\}\ ;\ \{x_2, x_3\}\ ;\ \{x_1, x_3\}\ ;\ \{x_1, x_4\}\ ;\ \{x_1, x_5\}\big\}$

Un **graphe simple** est un couple formé de deux ensembles : un ensemble $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, et un ensemble A formé de paires non ordonnées de sommets <u>distincts</u> de X, appelés **arêtes**. On notera $G = (X, A)$

Lorsque $a = \{x_i, x_j\} \in A$, on dit que a est l'arête de G d'**extrémités** x_i et x_j.

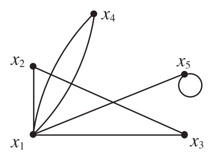
Les sommets x_i et x_j sont dits **adjacents** dans G

Les arêtes $a = \{x_i, x_j\}$ et $b = \{x_j, x_k\}$ sont dites **adjacentes** si elles ont un sommet en commun.



Une **boucle** est une paire du type $b = \{x_i, x_i\}$

Dans un **multigraphe**, les boucles sont interdites, mais deux sommets peuvent être joints par plusieurs arêtes



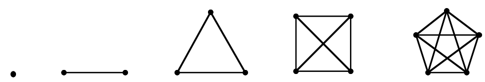
Dans un **pseudographe**, les boucles et les arêtes multiples sont autorisées.

Exemples

a) Le graphe d'un tournoi, $T = (X, A)$ où:
X est l'ensemble des participants au tournoi,
A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant lors d'un match.

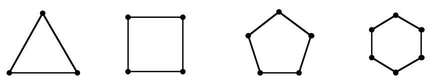
b) La carte routière de Suisse, $S = (X, A)$ où:
X est l'ensemble des villes de la Suisse,
$A = \{\{x\ , y\} |$ il y a au moins une route directe reliant les villes x et $y\}$.

c) Les **graphes complets** K_n où l'on relie n points entre eux :



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

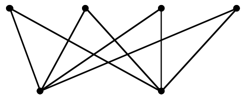
d) Les graphes C_n où l'on relie les points entre eux en formant un **cycle** ($n \geq 3$) :



C_3 C_4 C_5 C_6

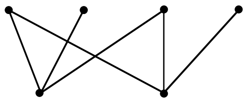
e) Les graphes **bipartis complets** $K_{n,m}$ où

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$,
$A = \{\{x_i, y_j\} \mid 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq m\}$.



$K_{4,2}$

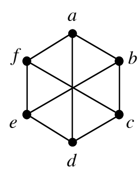
Le graphe suivant est un graphe **biparti** :



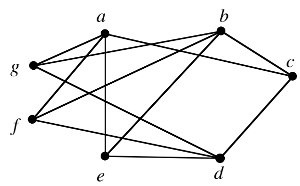
Exercice 5 Tracer les graphes suivants:
a) K_8 **b)** $K_{1,6}$ **c)** C_7

Exercice 6 Combien y a-t-il de sommets, d'arêtes qui composent les graphes suivants:
a) K_n **b)** $K_{n,m}$ **c)** C_{n}

Exercice 7 Les graphes *G* et *H* sont-ils bipartis ?

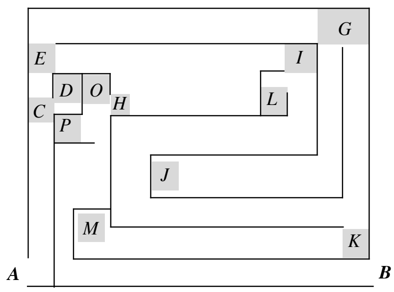


G



H

Exercice 8 **a)** Représenter le graphe du labyrinthe suivant:

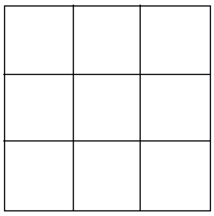


b) Proposer 4 chemins différents permettant en entrant en ***A*** de sortir en ***B***.

Exercice 9 Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux 2 règles suivantes :
- tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
- deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en communs.

Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

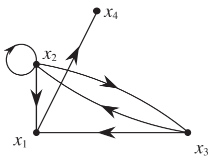
Exercice 10



Proposons-nous de placer les nombres de 1 à 9 dans les neuf cases du carré ci-contre avec la règle suivante: la somme $x + y$ de deux nombres de deux cases ayant un côté commun doit être un nombre premier.

Est-ce possible ? (proposer un graphe pour justifier votre réponse).

Définition Un **graphe orienté** $G = (X, A)$ est formé de deux ensembles : un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**, et un ensemble A formé de paires <u>ordonnées</u> de sommets distincts de X, appelés **arcs**.



Un pseudographe orienté

Lorsque $a = (x_i, x_j) \in A$, on dit que a est l'arc de G d'**extrémités initiale** x_i et **finale** x_j.

Exercice 11

Une des variantes du jeu de Fan Tan

Sur la table sont disposés deux tas de trois allumettes. Deux joueurs vont à tour de rôle enlever une ou deux allumettes de l'un des tas. Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

a) Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe.

b) Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

Exercice 12

Une société désire affecter 6 collaborateurs (C_1, …, C_6) à 6 nouvelles missions (M_1, …, M_6). Le tableau ci-dessous précise les compétences de chaque collaborateur.

Le collaborateur	a les compétence de
C_1	M_1 ; M_2
C_2	M_2 ; M_3 ; M_5
C_3	M_3 ; M_4
C_4	M_4 ; M_5 ; M_6
C_5	M_2 ; M_6
C_6	M_2

a) Modéliser la situation sur un graphe.

b) Comment affecter les missions aux collaborateurs afin de minimiser le nombre de sans-emploi ?