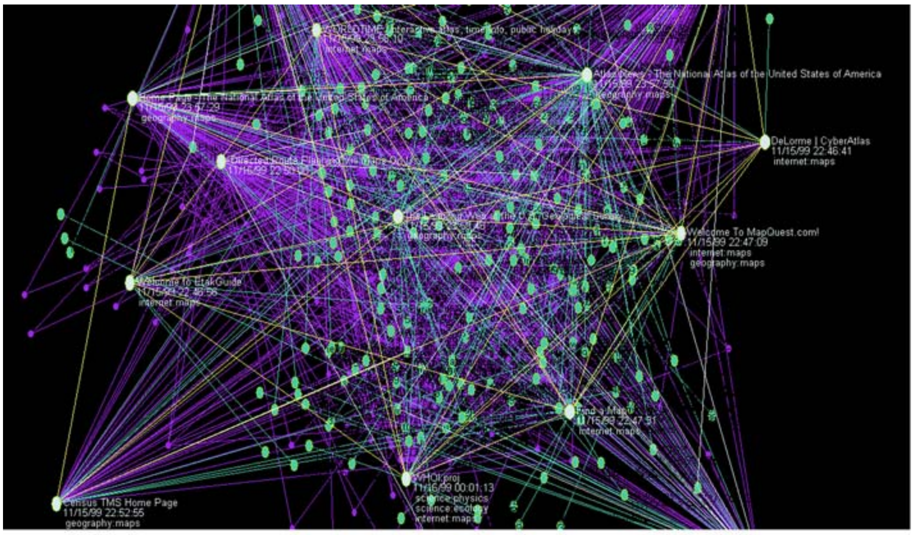
Chapitre 4: Graphes connexes

Introduction

À quel moment un réseau informatique satisfait-il à la propriété que tous les ordinateurs du réseau, pris deux à deux, puissent partager l'information ?
Des messages peuvent-ils lui être envoyés au moyen d'un ou de plusieurs ordinateurs intermédiaires ?
Quand un graphe sert à représenter ce réseau informatique, où les sommets sont des ordinateurs et les arcs, les liens de communication, cette question devient:
Existe-t-il toujours une chaîne entre deux sommets de ce graphe ?



Représentation des liens entre quelques sites internet créés à l'aide du logiciel *Internet Cartographer*.

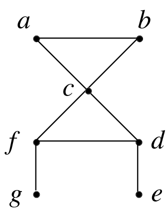
4.1 Connexité dans un graphe non orienté

Définition

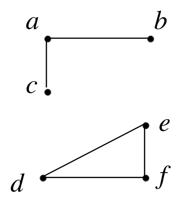
Un graphe non orienté est **connexe** s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.

Par conséquent, n'importe lequel des ordinateurs de ce réseau peut communiquer si et seulement si le graphe de ce réseau est connexe.

Exemple



G



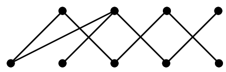
H

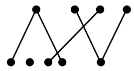
Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts. Le graphe H n'est pas connexe; par exemple, il n'y a pas de chaîne entre les sommets a et d.

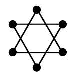
Définition Un graphe qui n'est pas connexe est l'union de deux ou de plusieurs sous-graphes connexes, chaque paire de ceux-ci n'ayant pas de sommet en commun. Les **sous-graphes** connexes disjoints sont les **composantes connexes** du graphe.

Exemple Dans la figure précédente, le graphe H contient deux composantes connexes:
H_1 formé des sommets a, b et c et H_2 formé des sommets d, e et f.

Exercice 38 Dans les 3 graphes suivants, déterminer le nombre de composantes connexes :







Exercice 39 Quel est le nombre minimum d'arêtes dans un graphe connexe formé de n sommets ?
Démontrer votre affirmation.

Exercice 40 Combien y a-t-il de graphes simples connexes non isomorphes qui ont n sommets quand n est égal à :

a) 2 ? **b)** 3 ? **c)** 4 ?

Exercice 41 Soit G un graphe simple formé de n sommets. Montrer que :

a) ce graphe contient au plus $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes ;

b) ce graphe, s'il est non connexe, contient au plus $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ arêtes ;

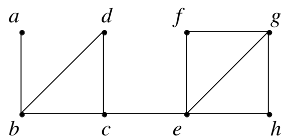
c) si ce graphe contient au moins $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ arêtes, alors il est connexe.

Exercice 42 Considérons un graphe simple connexe formé de 10 sommets. Que pouvez-vous affirmer au sujet du nombre d'arêtes ?

En reprenant l'exemple d'introduction du réseau informatique, il peut arriver qu'un des liens ou qu'un des ordinateurs du réseau tombe en panne. Pour la bonne gestion de ce réseau, il faudrait que celui-ci reste encore connexe.

Définition Le retrait d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes à ce sommet conduit à former un sous-graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial. Ces sommets sont appelés **points de coupure**. Le retrait d'un point coupure à partir d'un graphe connexe produit un sous-graphe qui n'est pas connexe. De façon similaire, une arête dont le retrait produit un graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial est appelée un **séparateur**.

Exemple Trouvez les points de coupure et les séparateurs dans le graphe illustré à la figure ci-contre.

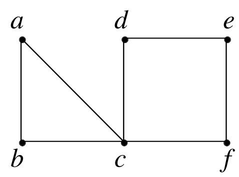


Solution:
- Les points de coupure sont b, c et e. Le retrait de l'un de ces sommets et de ses arêtes adjacentes **sectionne** le graphe.
- Les séparateurs sont $\{a\ ;\ b\}$ et $\{c\ ;\ e\}$. Le retrait de l'un d'eux sectionne le graphe.

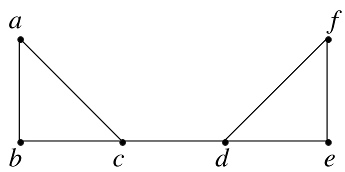
Exercice 43

a) Dans les 3 graphes suivants, trouver tous les points de coupure.

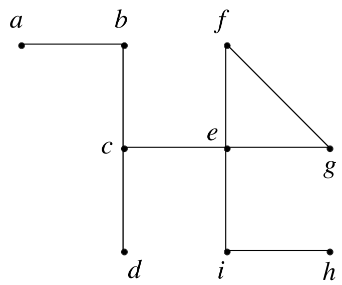
b) Trouver tous les séparateurs des graphes précédents.



F

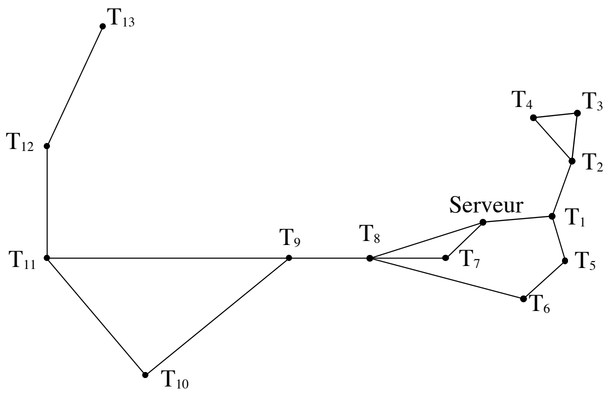


G



H

Exercice 44 Un réseau de communication informatique (Serveur – Terminaux) doit être sécurisé par un cycle de secours en cas de défaillance de liens. Déterminer le nombre minimum de liens qui faut ajouter afin de pouvoir pallier à une rupture d'un lien initial quelconque dans le réseau. Préciser le/les liens qu'il s'agit ajouter.

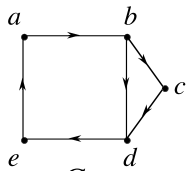


4.2 Connexité dans les graphes orientés

Définition Un graphe orienté est **fortement connexe** s'il existe un chemin du sommet *a* au sommet *b* et du sommet *b* au sommet *a*, quels que soient les sommets représentés par *a* et *b* dans le graphe.

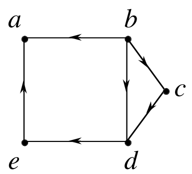
Un graphe orienté est **faiblement connexe** s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets dans le graphe si l'on ne considère plus l'orientation des arcs.

Exemple Les graphes *G* et *H* présentés ci-contre sont-ils fortement connexes ? Sont-ils faiblement connexes ?



G

Solution: Le graphe *G* est fortement connexe parce qu'il existe un chemin entre n'importe quelle paire de sommets dans ce graphe orienté (vérifiez-le !!). Par conséquent, *G* est également faiblement connexe.

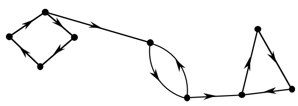


H

Le graphe *H* n'est pas fortement connexe, car par exemple, il n'existe pas de chemin orienté de …… vers …….

Vous pouvez vérifier par contre qu'il existe une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets du graphe si l'on ne considère pas l'orientation. *H* est donc faiblement connexe.

Exercice 45 **a)** Le graphe suivant est-il fortement connexe ?



b) Déterminer alors le nombre de composantes fortement connexes.

4.3 Quelques applications

Exercice 46 Démontrer qu'un graphe simple à n sommets où le degré de chacun d'eux est supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$ est connexe.

Exercice 47 Dans ce pays il y a 15 villes; chaque ville est reliée par des chemins à 7 villes au moins. Démontrer qu'en partant de chaque ville on peut atteindre toute autre ville (en passant peut-être par d'autres villes).

Exercice 48 À Grapheville, on ne peut se déplacer qu'en métro. De la station "Centre" partent 7 lignes, de la station "Loin-loin" ne part qu'une seule ligne. De toutes les autres stations partent 4 lignes. Montrer qu'on peut se rendre en métro de "Centre" à "Loin-loin".

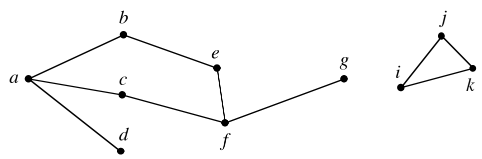
Exercice 49 Montrer que, parmi 6 personnes, il y a un groupe de 3 personnes qui se connaissent mutuellement, ou bien un groupe de 3 qui ne se connaissent pas.

Exercice 50 On considère l'algorithme suivant:

```
ALGORITHME
Donnée: Un sommet x du graphe
Résultat: L'ensemble ⊂, composante connexe contenant x
⊂ = Ø ; ∈ = {x}
Tant que ∈ n'est pas vide faire
    Choisir un élément y de ∈
    Retirer y de ∈ et le mettre dans ⊂
    Pour chaque voisin z de y qui n'est pas dans ∈ ni dans ⊂ faire
        Mettre z dans ∈
    fin Pour
fin Tant que
```

a) Analyser cet algorithme, à quoi sert-il ??

b) On applique cet algorithme au graphe suivant:



Le tableau ci-dessous décrit les différentes itérations de l'algorithme exécuté sur le graphe. Compléter les 5 dernières itérations:

Initialisation	$\subset = \emptyset$	$\in = \{a\}$
Itération 1	$\subset = \{a\}$	$\in = \{b, c, d\}$
Itération 2	$\subset = \{a, b\}$	$\in = \{c, d, e\}$
Itération 3		
Itération 4		
Itération 5		
Itération 6		
Itération 7		