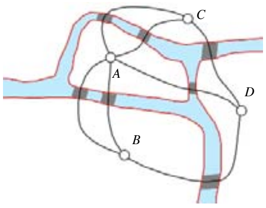
Chapitre 6: Graphes eulériens et hamiltoniens

6.1 Introduction et les premières définitions

Introduction



La date de naissance de la théorie des graphes peut être fixée à l'année 1736. L'histoire raconte que les habitants de Königsberg en Prusse (maintenant Kaliningrad en Russie) souhaitaient savoir s'il existait un moyen de partir de chez soi, emprunter tous les 7 ponts, une et une seule fois, et revenir dans sa demeure.
Leonhard Euler, mathématicien bâlois, montra que c'était impossible et fut amené pour cela à introduire les premiers rudiments de théorie des graphes, dont celle de cycle eulérien qui va être définie ci-dessous.

Rappels

- Un **chemin** est une suite de sommets reliés par des arêtes.
- Un **cycle** est un chemin fermé.

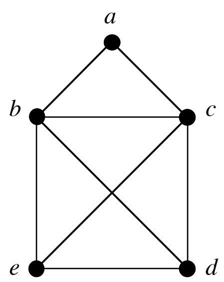
Définitions

- Un **chemin eulérien** est un chemin dans le graphe qui passe par toutes les arêtes juste une seule fois. Si ce chemin est fermé, on parlera de **cycle eulérien**.

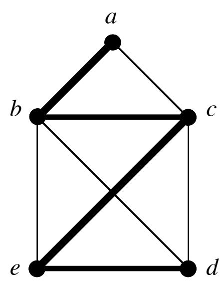
- Un **chemin hamiltonien** est un chemin dans le graphe qui passe par tous les sommets une et une seule fois. Si ce chemin est fermé (i.e. il existe une arête reliant le sommet de départ au sommet d'arrivée), on parlera de **cycle hamiltonien**.

- Un graphe est dit **hamiltonien** s'il possède un cycle hamiltonien.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un cycle eulérien.

Exemple:



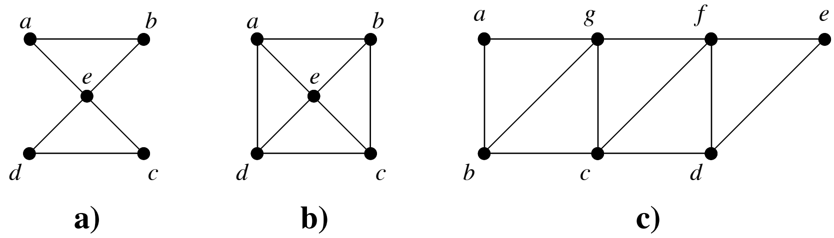
chemin eulérien:
e-b-d-e-c-a-b-c-d
pas de cycle eulérien



chemin hamiltonien:
d-e-c-b-a
cycle hamiltonien:
d-e-b-a-c

Exercice 70 À Kaliningrad, il y a aujourd'hui deux ponts de plus que les sept qui ont été construits au XVIII^{e} siècle. Ces deux nouveaux ponts font la jonction respectivement entre les régions B et C et les régions B et D. Est-il possible à un promeneur de traverser les neuf ponts de Kaliningrad une fois seulement et de revenir à son point de départ ?

Exercice 71 Parmi les graphes suivants, lesquels contiennent un chemin eulérien ou chemin hamiltonien ?
Parmi ceux-ci, lesquels sont des graphes eulériens ou graphes hamiltoniens.

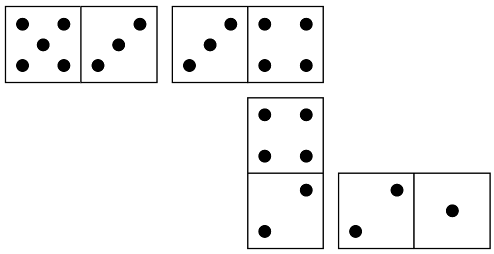


Exercice 72 On dispose d'un fil de fer de 120 cm.

a) Est-ce possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm de côté sans couper le fil ?

b) Si non, combien de coups de ciseaux faut-il faire au minimum ?

Exercice 73 On considère des dominos dont les faces sont numérotées à l'aide de deux chiffres choisis entre 1 et 6. On précise qu'il n'y a jamais deux dominos identiques.



a) En excluant les dominos doubles (2 fois le même chiffre), de combien de dominos dispose-t-on ?

b) Peut-on arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

c) Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il toujours possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

d) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

La jeune fille aux dominos
d'Albert Anker

Les dominos sont à l'origine une modification chinoise du jeu de dés indien. Le dé indien est connu en Europe comme dé à six faces ; il était utilisé en Inde notamment pour le Chaturanga, l'un des ancêtres du jeu d'échecs. Les Chinois ont transformé ces dés en pièces plates réversibles représentant des points.
En général, le nombre de points va de 0 à 6, mais on trouve des variantes allant de 0 à 9, de 0 à 12, de 0 à 15 et de 0 à 18.
Le mot « domino » proviendrait de la similitude entre les pièces du jeu (recto blanc, verso noir) et l'habit des religieux dominicains (lequel est blanc, mais peut être recouvert d'une cape noire servant de manteau).

6.2 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de cycles eulériens

Il existe des critères de base qui permettent de déterminer si un multigraphe contient un cycle eulérien (ou un chemin eulérien). Euler découvrit ces critères lorsqu'il résolut le fameux problème des ponts de Königsberg. On supposera que tous les graphes de cette section ont un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Que peut-on dire d'un multigraphe connecté qui aurait un cycle eulérien ?

Condition nécessaire : Un graphe contenant un cycle eulérien admet pour chaque sommet un degré pair.

Pour le démontrer, on note d'abord qu'un cycle eulérien commence avec un sommet a, passe par une arête incidente à a, disons $\{a ; b\}$. Cette arête contribue pour 1 à deg(a). Chaque fois qu'un cycle passe par un sommet, il contribue pour 2 au degré de ce sommet, puisque le cycle arrive par une arête incidente à ce sommet et repart par une autre arête incidente.
Finalement, le cycle se termine au point où il a commencé, contribuant encore une fois pour 1 au deg(a). Par suite, deg(a) doit être pair, puisque le cycle contribue pour 1 quand il commence, pour 1 quand il se termine et pour 2 chaque fois qu'il passe par a (si c'est le cas). Un sommet autre que a admet un degré pair parce que le cycle contribuera pour 2 à son degré chaque fois qu'il passera par ce sommet.

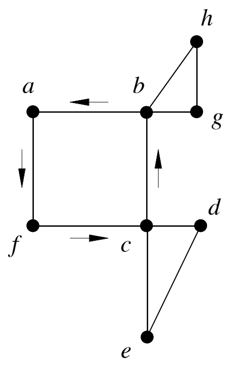
On conclut que si un graphe connecté comprend un cycle eulérien, alors tous les sommets doivent avoir des degrés pairs.

Est-ce qu'un cycle eulérien existe toujours dans un multigraphe connecté si tous ses sommets sont de degré pair ?

Condition suffisante : Si tous les sommets d'un graphe sont de degré pair, alors ce graphe contient un cycle eulérien

On suppose que G est un multigraphe connexe et que le degré de chaque sommet de G est pair. On formera un cycle qui commence à un sommet arbitraire a de G.

Algorithme pour construire un cycle eulérien

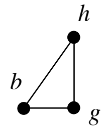


G

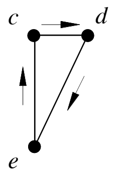
Soit $x_0 = a$. D'abord, on choisit arbitrairement une arête $\{x_0 ; x_1\}$ incident au sommet a. On continue en construisant un chemin $\{x_0 ; x_1\}$, $\{x_1 ; x_2\}$, …, $\{x_{n-1} ; x_n\}$ aussi long que possible. Par exemple, dans le graphe G de la figure ci-contre, on part du sommet a et on choisit une succession d'arêtes $\{a ; f\}$, $\{f ; c\}$, $\{c ; b\}$ et $\{b ; a\}$.

Le chemin a une fin puisque le graphe a un nombre fini d'arêtes. Il commence au sommet a avec une arête de la forme $\{a ; x\}$ et se termine au sommet a avec une arête de la forme $\{y ; a\}$. Cette propriété vient du fait que chaque fois que le chemin passe par un sommet de degré pair, il utilise seulement une arête pour parvenir à ce sommet, de telle façon qu'il reste une arête pour repartir de ce sommet. Ce chemin pourra parcourir ou non toutes les arêtes du graphe.

On aura construit un cycle eulérien si toutes les arêtes sont utilisées. Dans le cas inverse, on considère le sous-graphe H obtenu à partir de G en éliminant les arêtes déjà utilisées et les sommets qui ne sont



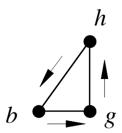
incidents à aucune des arêtes restantes. Lorsqu'on supprime le cycle *a, f, c, b, a* à partir du graphe de *G*, on obtient le sous-graphe *H* représenté sur la figure ci-contre.



H

Puisque *G* est connexe, *H* a au moins un sommet en commun avec le cycle qui a été supprimé. Soit x_j un tel sommet. (Dans cet exemple, *c* est le sommet.)

Chaque sommet de *H* a un degré pair (parce que tous les sommets de *G* ont un degré pair et que, pour chaque sommet, les paires d'arêtes incidentes à ce sommet ont été supprimées pour former *H*). À noter que *H* peut être ou ne pas être connexe. En commençant au sommet x_j, on construit maintenant un chemin dans *H* en choisissant les arêtes nécessaires, comme cela a été fait dans *G*. Ce chemin doit se terminer au sommet x_j. Par exemple, dans la figure *c, d, e, c* est un chemin de *H*. Ensuite, on forme un cycle dans *G* en aboutant le cycle dans *H* avec son cycle original dans *G* (cette construction est réalisable puisque x_j est l'un des sommets de ce cycle). On obtient le cycle *a, f, c, d, e, c, b, a*.



I

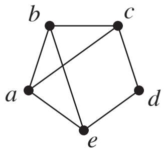
On continue ce processus sur les nouveaux sous-graphes jusqu'à ce que toutes les arêtes soient utilisées. (Le processus devra se terminer puisqu'il y a un nombre fini d'arêtes dans ce graphe.) On obtient ainsi un cycle eulérien. **Cet algorithme** montre que si des sommets d'un multigraphe connexe ont tous un degré pair, alors ce graphe contient un cycle eulérien.

Ces résultats sont résumés dans le théorème 1.

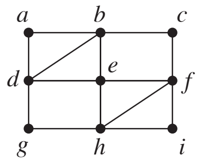
Théorème 1: Un multigraphe connexe admet un cycle eulérien **si et seulement si** chacun de ses sommets est de degré pair.

Exercice 74 Dans chaque graphe suivant, déterminer s'il contient un cycle eulérien

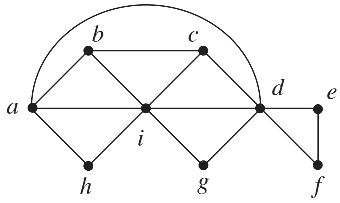
- Si oui, construire un tel cycle en utilisant l'algorithme présenté ci-dessus.
- Si non, déterminer s'il contient un chemin eulérien et construire un tel chemin s'il existe.



a)



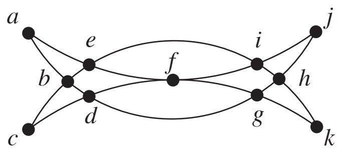
b)



c)

Exercice 75 *De nombreux jeux demandent de tracer, sans lever le crayon, une ligne continue qui ne repasse jamais par le même chemin. On peut résoudre ces casse-tête en utilisant les cycles ou les chemins eulériens.*

a) Montrer que le dessin ci-dessous peut être tracé entièrement sans lever le crayon.



b) En utilisant l'algorithme, présenté dans la preuve ci-dessus, proposer un cycle eulérien.

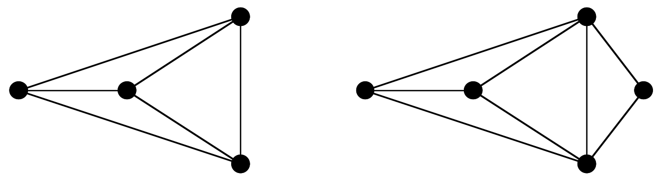
c) Que représente ce dessin et quelle en est sa signification ?

Exercice 76 En adaptant les deux étapes (conditions nécessaires et suffisantes) de la preuve du théorème 1, démontrer le théorème suivant :

Théorème 2: Un multigraphe connexe admet un chemin eulérien et non un cycle eulérien si et seulement s'il a exactement deux sommets de degré impair.

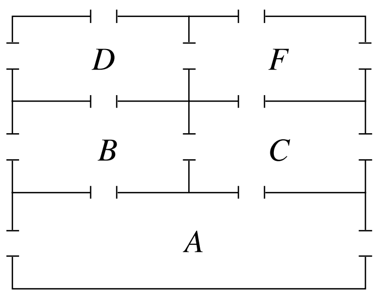
Exercice 77 Le théorème précédent peut-il s'appliquer à un graphe ne contenant qu'un seul sommet de degré impair ?

Exercice 78 Un facteur désire faire sa tournée sans passer deux fois dans la même rue. Est-ce possible si sa tournée a les profils suivants (où chaque rue est représentée par une arête):

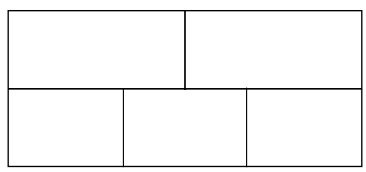


a) **b)**

Exercice 79 Un veilleur de nuit, qui dispose d'une couchette en D, doit visiter toutes les salles et vérifier chaque porte, une et une seule fois puis revenir en D. Quel parcours lui proposez-vous ?



Exercice 80 Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante ?



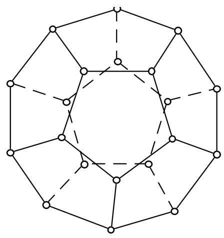
Exercice 81 Quels sont les graphes complets K_n qui admettent un cycle eulérien ?

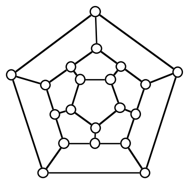
6.3 Cycle et chemins hamiltoniens

On a démontré les conditions **nécessaires et suffisantes** pour l'existence de chemins et de cycles contenant toutes les arêtes d'un graphe une fois seulement. Est-il possible d'établir les mêmes constats pour des cycles ou des chemins, mais qui comprendraient cette fois tous les sommets d'un graphe une fois seulement ? Il s'agira donc de rechercher des cycles ou chemins hamiltoniens

William Rowan Hamilton
(1805 – 1865)

Cette terminologie provient du casse-tête du « Tour du monde » inventé en 1857 par le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton. Le jeu se présentait sous la forme d'un dodécaèdre de bois, c'est-à-dire un polyèdre à 12 faces en forme de pentagone régulier, comme dans la figure ci-dessous. Les 20 sommets de ce dodécaèdre portaient les noms des différentes villes du monde. Le jeu consistait à partir d'une ville quelconque et à voyager le long des arêtes du dodécaèdre de manière à passer une fois seulement par les 19 autres villes, puis de revenir au point de départ.





On considère la question équivalente suivante: existe-t-il un cycle dans le graphe planaire du dodécaèdre qui passe par tous les sommets une fois seulement ? La réponse est positive, je vous laisse en trouver un dans la figure.

Existe-t-il une façon simple de déterminer si un graphe contient un cycle hamiltonien ou un chemin hamiltonien ? À première vue, il semblerait que oui, puisqu'on peut répondre simplement à la question similaire de savoir si un graphe possède un cycle eulérien. Cependant, il n'existe pas de critères **nécessaires et suffisants** pour démontrer l'existence de cycles hamiltoniens, même si de nombreux théorèmes donnent des conditions suffisantes pour l'existence de tels cycles.
Nous ne mentionnerons que le théorème suivant (sans preuve).

Théorème de Dirac: 1952

Soit G un graphe simple avec $n \geq 3$ sommets.
si $\deg(x) \geq n/2$ pour chaque sommet, alors il est hamiltonien.

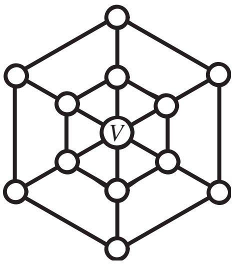
Exercice 82

Démontrer qu'un graphe avec un sommet de degré 1 ne peut contenir de cycle hamiltonien.

Exercice 83 Soit un graphe biparti complet $K_{n,m}$
Donner et justifier les conditions pour que ce graphe soit hamiltonien.

Exercice 84 Un message de diagnostic doit être envoyé sur un réseau informatique afin d'effectuer les tests de tous les terminaux par le biais d'un réseau intranet. Quelle sorte de graphe doit représenter le réseau pour tester tous les liens intranet ? Et pour tester tous les terminaux ?

Exercice 85 Le problème du voyageur de commerce.



Étant données 13 villes reliées par des routes, un voyageur de commerce habitant la ville V peut-il passer par chaque ville une fois et une seule, en rentrant chez lui à la fin de son circuit ?

Nota Bene : ce problème est connu sous le nom du problème du voyageur de commerce. Et aujourd'hui encore, on ne connaît pas sa solution générale !

Exercice 86 Donner un exemple de graphe comportant au moins six sommets tel que:
a) il est hamiltonien mais pas eulérien ;
b) il est eulérien mais pas hamiltonien.

Exercice 87 Le problème suivant a été étudié par Euler en 1759 :

Par des sauts successifs sur un échiquier, le cavalier doit passer une et une seule fois par toutes les cases et éventuellement revenir à son point de départ.

Est-ce possible, et si oui, proposer le cycle ou chemin correspondant (indication: le premier saut est déjà proposé ci-dessous).