

Sous la direction de
Robert Ferréol.

l'espace. Les choses sont alors beaucoup plus simples : on peut en effet trouver n objets (même des polyèdres) tels que chacun de ces objets touche les $n-1$ autres et sur une surface non nulle. Une figure suffit pour décrire le contre-exemple que nous avons trouvé :

Il n'y a donc pas de théorème de couleur dans l'espace : n'objets qui se touchent mutuellement nécessitent n couleurs pour être colorés.

* S'il existe pas de suite de pays coloriés en **a** ou en **c** se touchant par au moins l'une de leurs frontières, permettant de joindre **A** et **C**, on peut colorier **A** en **c**, et inverser les couleurs **a** et **c** de proche en proche. On se ramène au cas précédent et **P** peut alors être colorié en **a**.

* S'il existe une telle suite, les pays **B** et **D** coloriés respectivement en **b** et en **d** ne peuvent être les extrémités d'une suite de pays de couleurs **b** et **d** (pour des raisons évidentes de connectivité). En faisant le raisonnement précédent, on peut donc colorier **B** en **d**, et donc **P** en **b**.

On peut donc colorier une carte possédant $n+1$ pays avec un maximum de cinq couleurs. La propriété est vraie à l'ordre $n+1$, ce qui achève la récurrence.

Conclusion : on peut donc colorier toute carte de géographie d'un continent avec un maximum de cinq couleurs différentes.

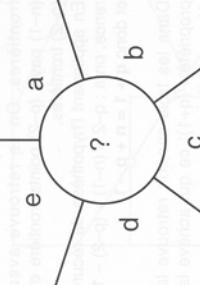
■ Et dans l'espace ?

On aimerait bien pouvoir démontrer le théorème des quatre couleurs par la même méthode des échanges de couleur. C'est ce qu'avait cru pouvoir faire Kempe au 19^e siècle. Hélas, ça ne marche pas.

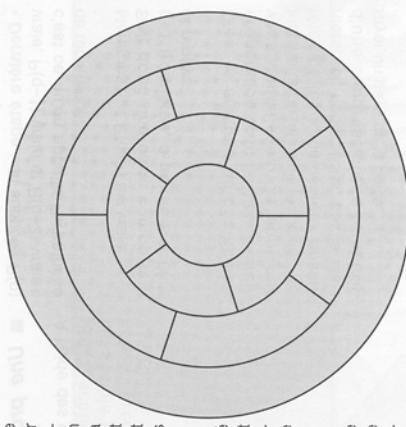
Cependant, on peut facilement utiliser cette méthode pour démontrer un théorème faible des quatre couleurs :

Si dans une carte, chaque pays n'a pas plus de quatre voisins, alors cette carte est colorable à l'aide de quatre couleurs.

Malheureusement, vous pourrez constater en consultant n'importe quel atlas que les pays ont en général cinq à six voisins chacun (et remarquer par la même occasion que les géographes utilisent habituellement nettement plus de quatre couleurs !) ...



Nous nous sommes enfin posé le problème de la généralisation à



Le problème consiste désormais à montrer que l'on ne peut abaisser le nombre 5 : en d'autres termes, à exhiber une carte dont tous les pays auraient au moins 5 voisins chacun...

Or nous avons trouvé ce contre-exemple, et nous vous le présentons, non sans une certaine fierté.

Il nous confirme que quelle que soit la carte de géographie considérée, il existe toujours un pays n'ayant pas plus de cinq frontières communes, et que, de plus ce nombre cinq, ne peut pas être abaissé.

■ Le théorème

Démontrons enfin le théorème lui-même, à savoir qu'avec un maximum de cinq couleurs, on peut colorier n pays avec un choix de cinq couleurs.

Il suffit pour cela de raisonner par récurrence. Vous commencez à avoir l'habitude !

- Il est bien évident que l'on peut colorier 1 pays avec un choix de cinq couleurs !

- Prendons pour hypothèse de récurrence le fait que l'on puisse, avec cinq couleurs colorier toute carte possédant N pays (la récurrence porte sur le nombre N).

Considérons une carte possédant $N+1$ pays. D'après ce que l'on a vu précédemment, on peut dire que dans cette carte il existe au moins un pays **P** n'ayant pas plus de cinq frontières.

On supprime alors momentanément une frontière de ce pays. La carte contient désormais N pays. D'après l'hypothèse de récurrence, cette carte est coloriable avec un maximum de cinq couleurs différentes.