Théorème d'Euler

Soit G un graphe simple planaire connexe.
Soit s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. Alors

$$s - a + f = 2$$

Démonstration:

Regardons tout d'abord un cas particulier extrêmement simple : le graphe qui a un seul sommet, et pas d'arête, qu'on appelle le graphe trivial. Il ne délimite évidemment qu'une seule face, on a donc $s = 1$, $a = 0$, $f = 1$, et on trouve donc bien $s - a + f = 2$.

Considérons maintenant un graphe planaire connexe quelconque. Nous allons montrer qu'on peut diminuer petit à petit son nombre d'arêtes et/ou de sommets, jusqu'à obtenir le graphe trivial, et de façon à ce qu'à chaque étape le graphe reste connexe, et que $s - a + f$ reste inchangé. Ainsi, nous aurons montré $s - a + f$ est toujours égal à 2.

On va d'abord supprimer petit à petit des arêtes jusqu'à obtenir un graphe sans cycle. Supposons donc que notre graphe en contienne. Ce cycle délimite donc une face. Alors on peut supprimer une des arêtes de ce cycle. Le graphe reste en effet connexe : si un chemin reliant deux sommets du graphe passait par cette arête, on peut le remplacer par un chemin qui parcourt l'autre partie du cycle. Ensuite, $s - a + f$ reste inchangé : on n'a pas changé le nombre s de sommets, on a diminué de 1 le nombre a d'arêtes, et on a aussi diminué de un le nombre f de faces car l'arête qu'on a ôtée séparait deux faces différentes.

Ainsi, chaque fois qu'on a un graphe qui contient des cycles, on peut lui ôter une arête. À force d'ôter des arêtes, on finit par arriver à un graphe qui ne contient plus de cycle.

Dans un tel graphe qui n'est pas le graphe trivial, il y a au moins un sommet qui est l'extrémité d'exactement une arête. Supposons en effet que ce ne soit pas vrai: chaque sommet est alors l'extrémité d'au moins deux arêtes. Je choisis un sommet du graphe, et je me balade sur le graphe le long des arêtes, avec la condition que je ne reprendrai jamais une arête sur laquelle je suis déjà passé, jusqu'à ce que je ne puisse plus continuer. Alors quand je m'arrêterai, ce sera sur un sommet par lequel je suis déjà passé (puisque les autres arêtes ayant ce sommet pour extrémité auront déjà été empruntées), et mon chemin entre le passage précédent et celui-ci contient un cycle.

Maintenant, si dans mon graphe j'ai un sommet qui est l'extrémité d'exactement une arête, je peux retirer simultanément arête et sommet. Alors s diminue de un, a aussi, et f ne change pas, donc $s - a + f$ ne change pas; et le graphe reste connexe.

Ainsi, on peut retirer étape par étape une arête et un sommet au graphe, jusqu'à obtenir le graphe trivial. Et à ce moment-là, nous sommes au terme de la démonstration.