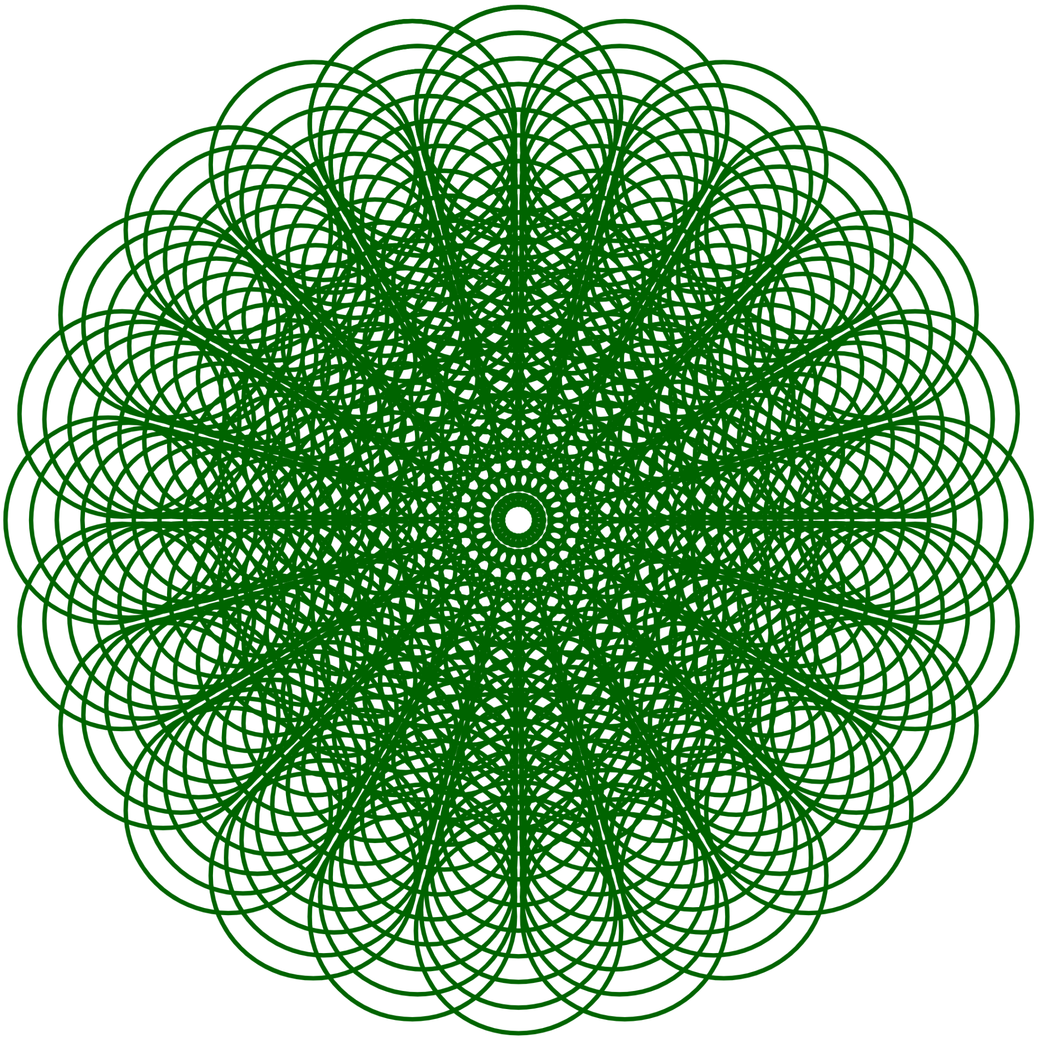
Analysis 3M

Carole Engelberger

26. April 2024



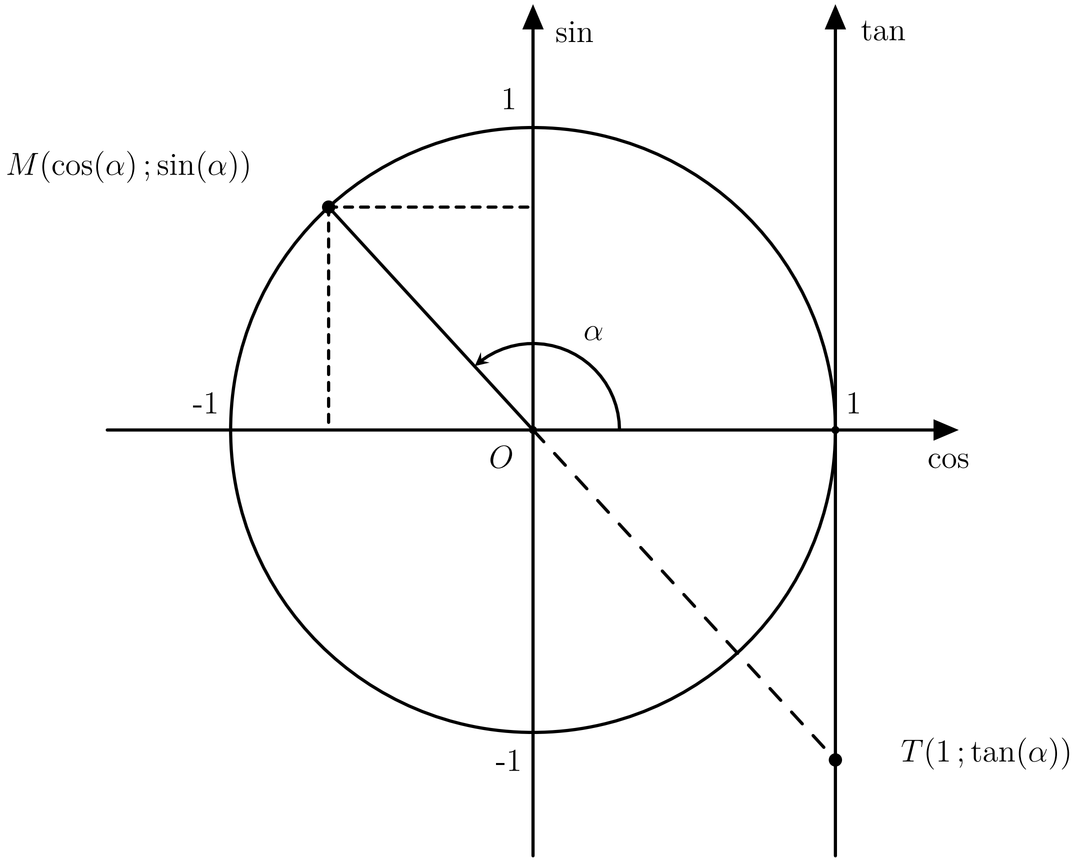
Inhaltsverzeichnis

Herzlichen Dank an Jean-Philippe Javet, Steven Gasser und Michaela Baumgärtner, deren Dokumente und Korrekturen mir sehr geholfen haben, um dieses Skript zu erstellen.

Kontakt : carole.engelberger@eduvaud.ch

1 Trigonometrische Funktionen

1.1 Einige Wiederholungen



Die trigonometrischen Funktionen werden mit Hilfe des Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) definiert. Sei M ein Punkt des Kreises, dann gilt:

- Der Kosinus von α, geschrieben $\cos(\alpha)$, ist die erste Koordinate des Punktes M.
- Der Sinus von α, geschrieben $\sin(\alpha)$, ist die zweite Koordinate des Punktes M.
- Die Tangens von α, geschrieben $\tan(\alpha)$, ist die zweite Koordinate des Punktes T.

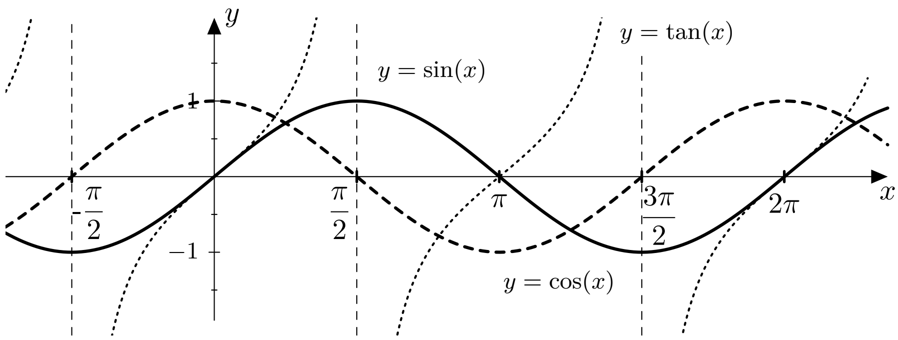
Eigenschaften.

- $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Wichtige Winkelwerte

α (Gradmass)	α (Bogenmass)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$				
$30°$				
$45°$				
$60°$				
$90°$				
$180°$				

Graphen



Periode

• Die Sinuskurve besteht aus identischen Schwingunen der Länge 2π ($360°$). Das folgt unmittelbar aus der Definition am Einheitskreis. Die Sinus-Funktion ist also eine periodische Funktion mit der **Periode** $P = 2\pi$.

• Die Kosinuskurve entsteht aus der Sinuskurve durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Daher ist die Cosinus-Funktion auch eine periodische Funktion mit der **Periode** $P = 2\pi$.

• Der Graph der Tangensfunktion besteht aus identischen Schwingunen der Länge π ($180°$). Die Tangens-Funktion ist also eine periodische Funktion mit der **Periode** $P = \pi$.

1.2 Graphen

Beispiel. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ und geben Sie deren Periode an.

Beispiel. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x + \pi)$ und geben Sie deren Periode an.

Aufgabe 1.1. Skizzieren Sie den Graphen folgender Funktionen.

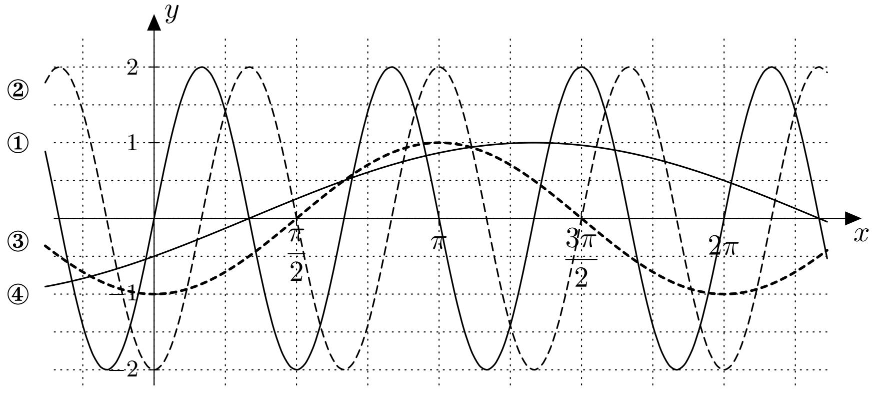
a) $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ **b)** $f(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos(3x)$ **d)** $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Aufgabe 1.2. Welchen Graphen gehört zu welcher Funktion ?

a) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $f(x) = 2\cos(3x + \pi)$

c) $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ **d)** $f(x) = -2\sin(3x - \pi)$



1.3 Trigonometrische Gleichungen

Um eine trigonometrische Gleichung zu lösen kann der Einheitskreis oft sehr hilfreich sein.

Beispiel. Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$

b) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan(x) = 4$

d) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 1.3. Lösen Sie folgende Gleichungen.
Von **a)** bis **f)** im Gradmass, und von **g)** bis **l)** im Bogenmass.

a) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

b) $\sin(3x) = 0,829$

c) $\tan(x) = -0,754$

d) $\cos(-x) = -1,43$

e) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 5,33$

f) $\sin(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \frac{3}{2}$

i) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

j) $4\cos(x + \pi) = 2\sqrt{3}$

k) $3\tan(2x + \pi) = \sqrt{3}$

l) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$

Beispiel. Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sin^2(x) = \frac{1}{4}$

b) $4\cos^2(x) - 4\cos(x) - 3 = 0$

c) $3\sin^2(x) + \cos^2(x) - 2 = 0$

Aufgabe 1.4. Lösen Sie folgende Gleichungen, wenn möglich im Bogenmass, sonst im Gradmass.

a) $\cos^2(x) = 1$

b) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$

c) $2\sin^2(x) - 5\sin(x) + 2 = 0$

d) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$

e) $2\cos^2(x) - \sin(x) = 1$

f) $5\sin(x) = 6\cos^2(x)$

g) $\tan^2(x) = 3$

h) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

i) $\tan^2(x) + 2\tan(x) = -1$

j) $3\sin^2(x) + 8\cos(x) + 1 = 0$

k) $\tan^2(x) = 1$

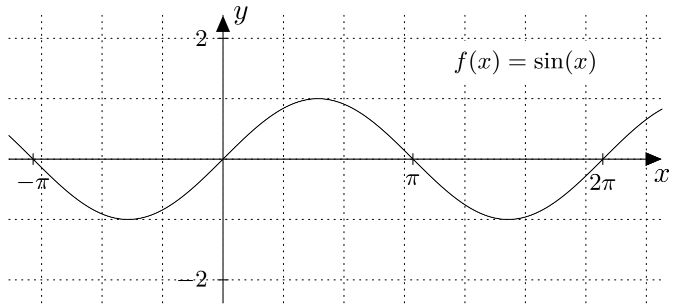
l) $\sin^2(x) = \cos^2(x)$

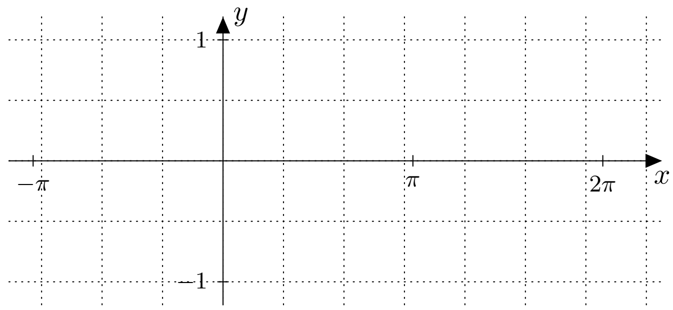
1.4 Ableitungsregeln

Wir könnten, wie im Kapitel 4 des 2. Jahres, die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen mithilfe der folgenden Formel berechnen:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Wir werden aber zuerst einen Graphen benützen, um die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ zu bestimmen. Wir werden hierunten die Ableitung skizzieren. Man sucht also markante Stellen, an denen die Tangentensteigung gut ablesbar ist. Man zeichnet also in manchen Punkte eine Tangente und trägt deren Steigung als Funktionswert f' in ein neues Koordinatensystem ein.





$f'(x) =$ ....

Ähnliche Verfahren würden es ermöglichen, die Ableitung der Kosinus- und Tangensfunktion zu finden.

Die Ableitungsregeln der trigonometrischen Funktionen lauten:

8. Regel: $f(x) = \sin(x)$ ➩ $f'(x) = \cos(x)$

9. Regel: $f(x) = \cos(x)$ ➩ $f'(x) = -\sin(x)$

10. Regel: $f(x) = \tan(x)$ ➩ $f'(x) = \tan^2(x) + 1$

oder $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3\cos(x)$

b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = x \cdot \tan(x) + x^2$

d) $f(x) = \cos(3x^2)$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

f) $f(x) = \sin^5(x)$

Aufgabe 1.5.
Wie oft muss man die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ableiten, um wieder f zu erhalten ?

Aufgabe 1.6. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

b) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

c) $f(x) = \cos(x) - 2\tan(x)$

d) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sin(x) + \cos(x)}$

g) $f(x) = \tan(3x)$

h) $f(x) = \cos(x^3)$

i) $f(x) = \cos^3(x)$

j) $f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

k) $f(x) = \sin(2x+5)$

l) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$

m) $f(x) = (x+1) \cdot \sin(x^2)$

n) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

Aufgabe 1.7. Beweisen Sie, dass $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$.

Aufgabe 1.8. Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von f im Punkt P:

a) $f(x) = \sin(x) - \dfrac{1}{2}x$ in $P\left(\dfrac{\pi}{2}; f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

b) $f(x) = x \cdot \cos(x)$ in $P(\pi; f(\pi))$.

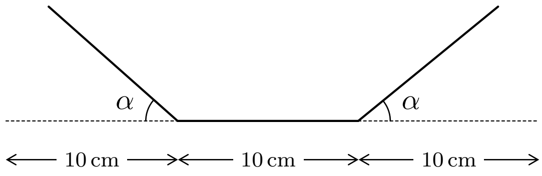
Aufgabe 1.9. Für welche Werte von x hat der Graph von $f(x) = \sin(x)$ dieselbe Steigung wie die Gerade, die durch die Punkte $A(1;4)$ und $B(-1;3)$ verläuft ?

Aufgabe 1.10. Bestimmen Sie für den Graphen von $f(x) = 4 \cdot \cos(x) + 2x$ die Punkte mit waagerechten Tangenten im Intervall $[0; 2\pi]$.

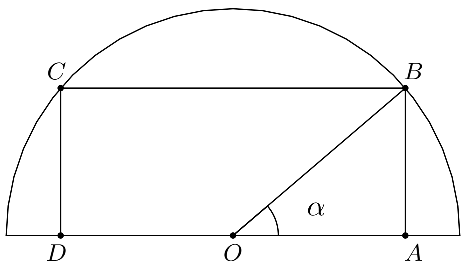
1.5 Extremwertaufgaben mit trigonometrischen Funktionen

In dieser Sektion werden wir dasselbe Verfahren brauchen, wie bei den Extremwertaufgaben im 2. Jahr.

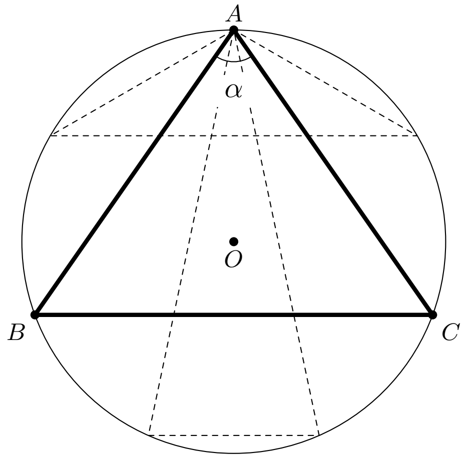
Beispiel. Eine Dachrinne entsteht, indem man auf jeder Seite ein Drittel eines langen, 30 cm breiten Zinkblechs umklappt. Wie muss der Winkel α gewählt werden, damit die Rinne möglichst viel Wasser auffangen kann?



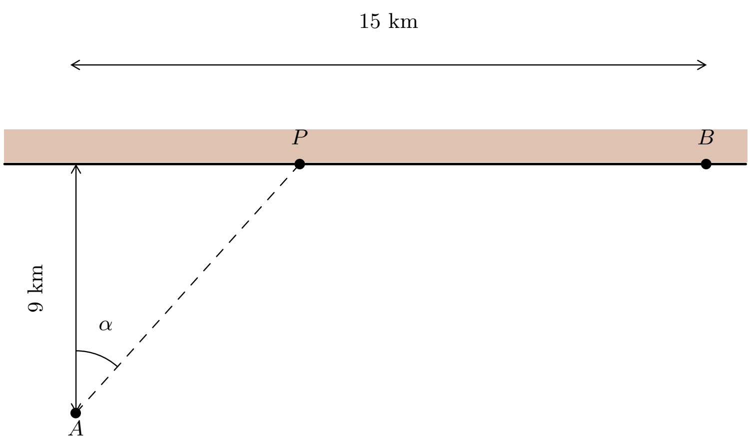
Aufgabe 1.11. Ein Rechteck wird in einen Halbkreis mit Diameter 2cm einbeschrieben. Finden Sie α, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks so gross wie möglich wird.



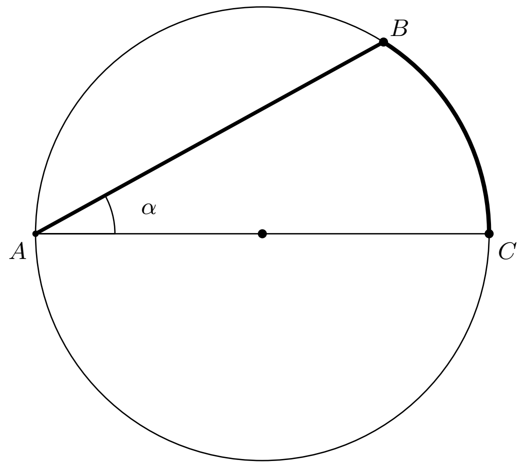
Aufgabe 1.12. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC ist in einem Kreis mit Radius 1 einbeschrieben. Für welchen Wert von α ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ?
Hinweis: arbeiten Sie im Dreieck OCB



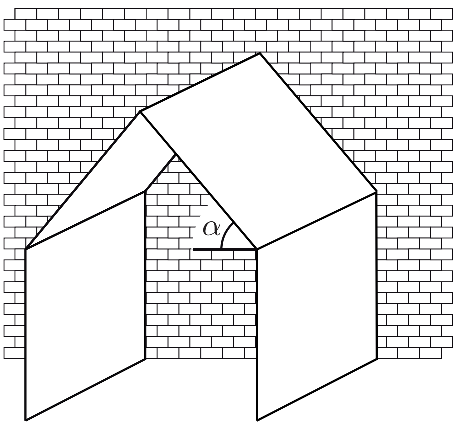
Aufgabe 1.13. Der Wächter eines Leuchtturms (Punkt A) muss so schnell wie möglich zum Küstenhaus (Punkt B). Mit dem Boot ist er 4 kmh schnell unterwegs, und zu Fuss geht er mit einer Geschwindigkeit von 5 kmh.
Da die Küste als geradlinig angenommen wird, bestimmen Sie den Winkel α und dann die Position des Anlegepunktes (Punkt P), damit die Fahrzeit minimal ist.



Aufgabe 1.14. Ein Wanderer beginnt am Punkt A, der sich am Ufer eines kreisförmigen Sees mit dem Durchmesser 2 km befindet, und möchte so schnell wie möglich den diametral gegenüberliegenden Punkt C erreichen. Er kann zu Fuß mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h oder mit einem Ruderboot mit einer Geschwindigkeit von 2 km/h gehen. In welchem Winkel zum Durchmesser muss er sein Boot ausrichten?



Aufgabe 1.15. Aus vier quadratischen Brettern mit einer Seitenlänge von 10 dm wird an einer Hauswand eine Hundehütte gebaut.
Bestimmen Sie den Winkel α, damit das Volumen der Hundehütte maximal wird.



2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

2.1 Einige Wiederholungen aus dem 2. Jahr

Bevölkerungswachstum, Kapitalzuwachs und Inflation sind Beispiele für die Verwendung von Exponentialfunktionen.

Im zweiten Jahr hatten wir die Gelegenheit, mit Formeln zu arbeiten, die einen Exponentialausdruck enthalten. In diesem Kapitel werden wir uns mit demselben Begriff in funktionaler Form befassen. Wir werden dieses Kapitel mit Kurvendiskussionen von Exponentialfunktionen abschliessen.

Ein paar Rechenregeln, die Sie für e^x und $\ln(x)$ kennen müssen

$e^0 = 1$	$\leftrightarrow$	$\ln(1) = 0$
$e^1 = e$	$\leftrightarrow$	$\ln(e) = 1$
$e^{\ln(x)} = \ln\left(e^x\right) = x$		
für x und $y \in \ldots$		für x und $y \in \ldots$
$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$	$\leftrightarrow$	$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
$\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$\leftrightarrow$	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$(e^x)^y = e^{x \cdot y}$	$\leftrightarrow$	$\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

Was wissen Sie über die Definitionsmenge, die Nullstellen und den Graphen von
$f(x) = \mathrm{e}^x$ und $f(x) = \ln(x)$?

2.2 Definitionsmenge, Nullstellen und Vorzeichentabelle

Beispiele. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\ln(x-2)=4$

b) $e^{x+4}=5$

c) $\ln(x+3)=\ln(2x+7)$

d) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right)=0$

Aufgabe 2.1. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge und lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\ln(x)=1$

b) $\ln(x)=0$

c) $\ln(x-4)=4$

d) $\ln(x^2)=0$

e) $e^{x+3}=5$

f) $e^{2x-1}=-8$

g) $\ln(2x)-\ln(5x-8)=0$

h) $\ln\left(\dfrac{2x}{5x-8}\right)=0$

i) $e^{x/10}=7$

j) $e^{x^2}=4$

Beispiel. Bestimmen Sie für die folgende Funktion die Definitionsmenge, die Nullstellen und machen Sie eine Vorzeichentabelle:

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$$

Aufgabe 2.2. Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die Definitionsmenge und die Nullstellen, und machen Sie eine Vorzeichentabelle.

a) $f(x) = \ln(2-4x)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+3}{\ln(x)-2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$

f) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $f(x) = (x+3)e^{1/x}$

h) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$

2.3 Ableitung

Wie wir es im zweiten Jahr gemacht hatten, sollten wir die Formel:

$$\lim_{x \to a} f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

anwenden, um die Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktionen zu berechnen. Wir werden in dieser Sektion aber nur die Ableitungsregeln anwenden.

1. Regel : $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

2. Regel: $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

3. Regel: $f(x) = e^{u(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

4. Regel: $f(x) = \ln(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Beispiele. Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-2x}$

c) $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

d) $f(x) = \ln(5x)$

e) $f(x) = \ln(2x^2)$

f) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$

Aufgabe 2.3. Bestimmen Sie die Definitionsmenge, die Nullstellen und die Ableitung folgender Funktionen.

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{1/x}$

d) $f(x) = \ln(-4x + 5)$

e) $f(x) = \ln(x^2 - x)$

f) $f(x) = x^2 e^{1/x}$

g) $f(x) = x(\ln(x) - 1)$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) + 1}$

i) $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$

Aufgabe 2.4.

a) Sei die Funktion $f(x) = e^x + 3x$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1; y)$.

b) Sei die Funktion $f(x) = \ln(x)$. Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt $Q(e; y)$ durch den Ursprung verläuft.

Aufgabe 2.5. Die Lungenkapazität einer Person (abhängig von ihrem Alter t) ist durch die folgende Funktion gegeben:

$$K(t) = \frac{110(\ln(t) - 2)}{t}$$

t entspricht dem Alter in Jahren, und es gilt $t > e^2$.

a) Berechnen Sie die Lungenkapazität für eine zehn-, zwanzig-, dreissig- und siebzigjährige Person.

b) Berechnen Sie das Alter, in dem die Lungenkapazität einer Person am grössten ist.

Aufgabe 2.6. In welchen Punkten $P(x_0; f(x_0))$ und $Q(x_0; g(x_0))$ haben die Graphen von f und g parallele Tangenten ?

a) $f(x) = e^x \quad g(x) = x$

b) $f(x) = \sqrt{e} \cdot x \quad g(x) = e^x - 2$

2.4 Grenzwerte

2.4.1 Einige Wiederholungen aus dem zweiten Jahr

Beispiel. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{12x^5 - 4x^3 + 4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{12x^2 - 4x + 4}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + 5x - 2}{12x^2 - 4x + 4}$

d) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\text{Zahl}} g(x) = \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x)\cdot g(x) =$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

e) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\text{Zahl}} g(x) = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x)\cdot g(x) =$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

f) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to\text{Zahl}} g(x) = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x)\cdot g(x) =$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

g) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to\text{Zahl}} g(x) = \infty\end{array}\right\} \Longrightarrow$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} f(x)\cdot g(x) =$ • $\lim\limits_{x\to\text{Zahl}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

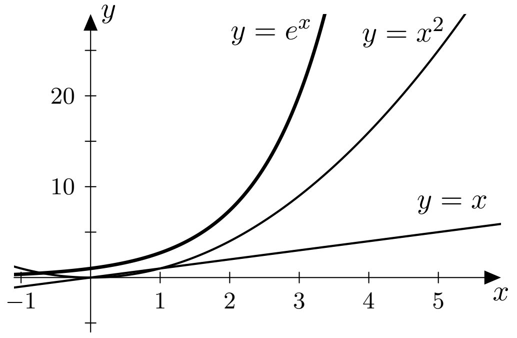
Es gibt also Situationen, wo der Grenzwert unbestimmt ist:

2.4.2 Grenzwerte mit e^x und $\ln(x)$

In dieser Sektion möchten wir folgende Grenzwerte berechnen:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Erster Fall: n = 1 und 2: Ergänzen Sie mit Hilfe vom Graphen folgende Grenzwerte:

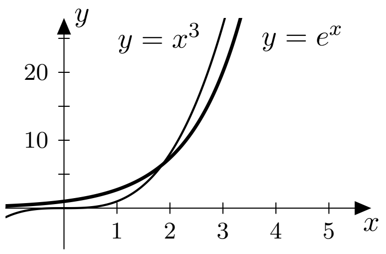


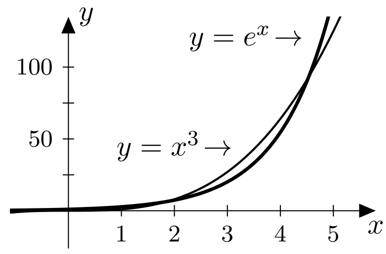
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \ldots\ldots$

Man stellt fest, dass e^x schneller wächst als x und x^2.

Wird sich das mit x^3 auch bestätigen ?

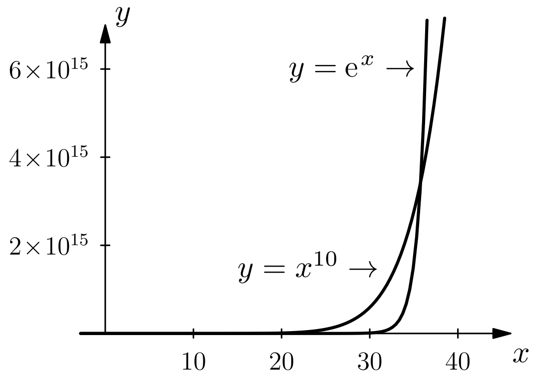
Zweiter Fall: n = 3:





Welche dieser beiden Funktionen wächst am schnellsten ?

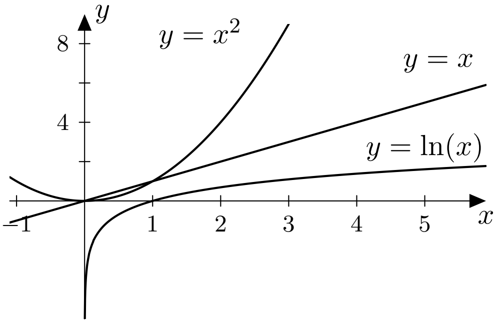
Dritter Fall: n=10: Ergänzen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe vom Graphen:



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x} = \ldots\ldots$

Bemerkung. Die Funktion wächst also schneller als alle Funktionen der Form .

Schauen wir jetzt, ob etwas ähnliches für die Funktion $\ln(x)$ gilt.



- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = \ldots\ldots$

Bemerkung. Die **Podestregel** kann man folgenderweise anwenden:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

Beispiel. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Podestregel.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0_+} x \cdot e^{1/x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{4x}$

Aufgabe 2.7. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^{2x}}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \ln(x^3)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} x$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} \ln(-x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^{3x-5}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} x^2$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

Bemerkung. Hier sind noch zwei Formeln, die sehr praktisch sind, um Grenzwerte mit Exponential- und Logarithmusfunktionen zu berechnen:

- $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$
- $\lim_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$

Beispiel. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3x+4}{x-2}}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^3+3x-2}{x+2}\right)$

Aufgabe 2.8. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$

b) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-3x+2}{2x^2}}$

c) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2x}{x^2-5}}$

d) $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{3x^2+2}{2x}}$

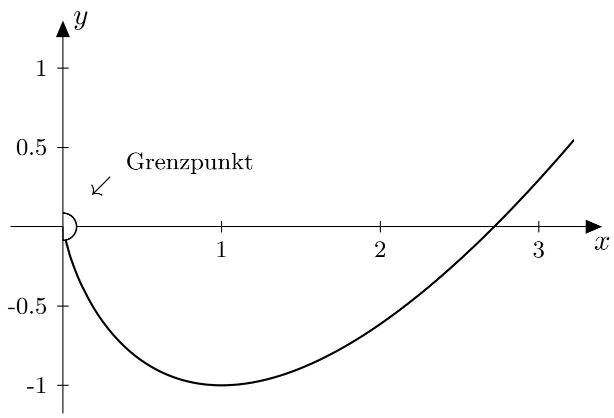
e) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x^2-3x+2}{x^2-5x+2}\right)$

f) $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

2.5 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion einer Exponentialfunktion erfolgt auf die gleiche Weise wie die Kurvendiskussion von Polynomfunktionen oder rationalen Funktionen. Es ist jedoch zu beachten, dass

1. Wir werden keine schiefe Asymptoten suchen, da man die Polynomdivision im Fall der Exponentialfunktionen nicht durchführen kann.
2. Es kann zwei verschiedene horizontale Asymptoten geben. Um diese zu finden, muss man folgendes berechnen:
   - die eventuelle **HAL** mit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
   - die eventuelle **HAR** mit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3. Anders als bei rationalen Funktionen kann der Graph einer Exponentialfunktion abrupt an einem Punkt beginnen, den wir als **Grenzpunkt** bezeichnen.



Beispiel. Führen Sie eine Kurvendiskussion von $f(x) = e^{\frac{x^2+x-2}{6x-12}}$ durch.

Aufgabe 2.9. Führen Sie eine Kurvendiskussion von f durch.

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = (x^2 - 6)e^{-2x}$

c) $f(x) = e^x(6 - e^x)$

d) $f(x) = e^{\frac{2}{x^2-4}}$

e) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x} \cdot e^{-x}$

f) $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^3+1}}$

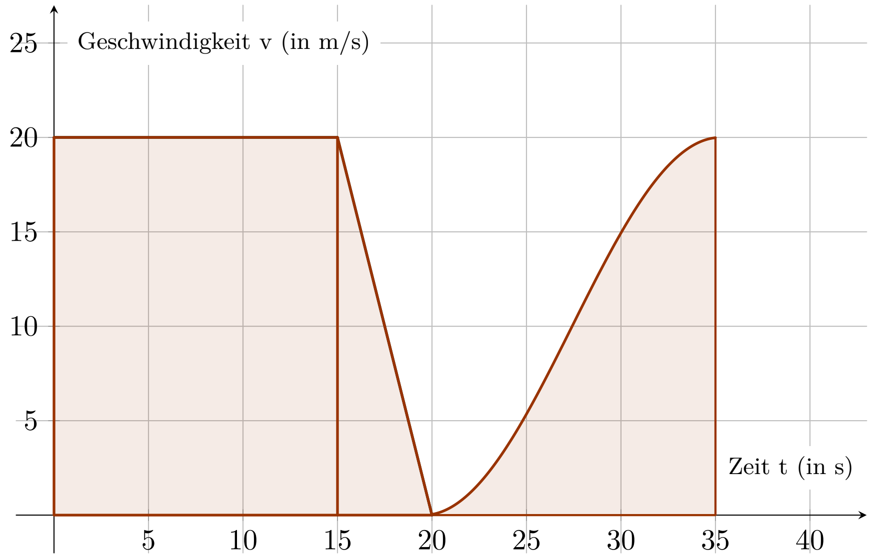
g) $f(x) = (2x^2 + 3x) \cdot e^{-x}$

3 Integralrechnung

3.1 Einführung

Die Berechnung des Flächeninhalts einfacher geometrischer Figuren wie Rechtecke, Polygone und Kreise wird in den ältesten bekannten mathematischen Dokumenten beschrieben. Der erste, der neue Rechenmethoden entdeckte und damit wirkliche Fortschritte gemacht hat, war Archimedes, der geniale griechischen Wissenschaftler. Mithilfe der Technik von Archimedes konnte man Flächen berechnen, die von Parabeln und Spiralen begrenzt wurden. Jahrhunderts versuchten mehrere Mathematiker, solche Flächen auf einfachere Weise mithilfe von Grenzwerten zu berechnen. Dennoch konnte man diese Methoden nicht verallgemeinern. Die wichtigste Entdeckung zur allgemeinen Lösung des Flächeninhaltproblems wurde unabhängig voneinander von Newton und Leibniz gemacht, als sie feststellten, dass die Fläche unter einer Kurve durch Umkehrung des Ableitungsprozesses erhalten werden kann. Unser Ziel in diesem Kapitel wird es sein, die Fläche eines Bereichs unter einer Kurve $y = f(x)$, die zwischen zwei vertikalen Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist, berechnen zu können.

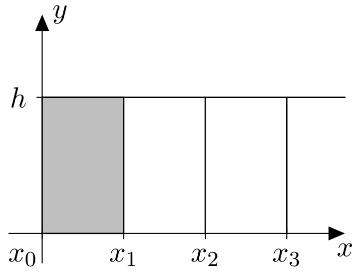
Beispiel. Ein Auto fährt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit, bremst dann gleichmässig ab und beschleunigt danach unregelmässig. Im Diagramm ist seine Momentangeschwindigkeit im Zeitintervall $[0; 30]$ dargestellt. Damit lässt sich die in diesem Intervall zurückgelegte Strecke bestimmen.



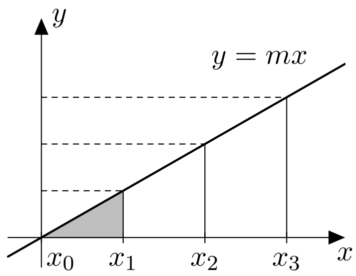
Bemerkung. Aus dem Beispiel folgt folgendes: Ist der Verlauf der lokalen (momentanen) Änderungsrate einer Grösse durch einen Graphen oberhalb der x-Achse gegeben, so kann man die Gesamtänderung der Grösse in einem Intervall $[a; b]$ als Flächeninhalt A zwischen dem Graphen und der x-Achse innerhalb des Intervalls deuten und dadurch ermitteln.

Beispiele. Berechnen Sie, für die drei gegebenen Funktionen, den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

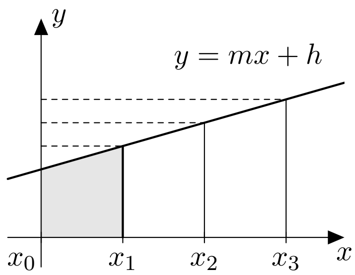
1. Fall: $f(x) = h$



2. Fall: $f(x) = mx$



3. Fall: $f(x) = mx + h$



Bemerkungen. Man bemerkt folgendes:

- Für $f(x) = h$ ist $A(x) = hx$
- Für $f(x) = mx$ ist $A(x) = \frac{1}{2}mx^2$
- Für $f(x) = mx + h$ ist $A(x) = \frac{1}{2}mx^2 + hx$
- Wenn man $A(x)$ ableitet, ist die Antwort jedes Mal $f(x)$.
- Dadurch gilt folgendes:

$$\boxed{f(x)} \quad \underset{(\dots)'}{\overset{\int \dots}{\rightleftarrows}} \quad \boxed{A(x)}$$

3.2 Stammfunktionen und das unbestimme Integral

Definition. F ist eine **Stammfunktion** von f wenn gilt: $F'(x) = f(x)$. Man schreibt

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

und die Menge aller Stammfunktionen heisst das **unbestimmte Integral** von f.

Beispiele. Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von f:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = 7x^4$

Bestimmen Sie jeweils das unbestimmte Integral:

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3.1. Bestimmen Sie jeweils das unbestimmte Integral:

a) $\displaystyle\int 4\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int 6x\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int 5x^4\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int 5\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$ **i)** $\displaystyle\int (2x)^3\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3.2. Sind die beiden Funktionen $F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2$ und $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$ Stammfunktionen derselben Funktion $f(x)$?

Aufgabe 3.3. Finden Sie $f(x)$, wenn man weiss, dass:

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5x^2 - 3x + c$

b) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{x} + c$

c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{x} + c$

Die Suche nach einer Stammfunktion ist nicht immer einfach und auch nicht immer möglich. Hier sind ein paar Beispiele von Stammfunktionen, die direkt aus den Ableitungsregeln folgen.

Ableitungsregeln **Stammfunktionen**

$\big(f(x) \pm g(x)\big)' =$

$$\boxed{① \ \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x) \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x}$$

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{x^4}{5} - \frac{3x^3}{2}\ \mathrm{d}x =$

$\big(k \cdot f(x)\big)' =$

$$\boxed{② \ \int k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x}$$

Beispiel: $\int 17 \cdot x^{-5}\ \mathrm{d}x =$

$\big((f(x))^n\big)' =$

$$\boxed{③ \ \int \big(f(x)\big)^n \cdot f'(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1} + c}$$

Beispiel: $\int \left(3x^2 + 5x - 1\right)^3 \cdot (6x+5)\ \mathrm{d}x =$

$\big(e^{f(x)}\big)' =$

$$\boxed{④ \ \int e^{f(x)} \cdot\ f'(x)\ \mathrm{d}x = e^{f(x)} + c}$$

Beispiel: $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\ \mathrm{d}x =$

$\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' =$

$$\boxed{⑤ \ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c}$$

Beispiel: $\displaystyle\int \frac{8}{4x-3}\ \mathrm{d}x =$

$\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' =$

$$\boxed{⑥ \ \int \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\ \mathrm{d}x = \sin\big(f(x)\big) + c}$$

Beispiel: $\int x \cdot \cos\left(x^2\right)\ \mathrm{d}x =$

$\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' =$

$$\boxed{⑦ \ \int \sin\big(f(x)\big) \cdot f'(x)\ \mathrm{d}x = -\cos\big(f(x)\big) + c}$$

Beispiel: $\int \sin(-x)\ \mathrm{d}x =$

Aufgabe 3.4. Bestimmen Sie jeweils das unbestimmte Integral:

a) $\int 3x^2 + 5x - 3 \, \mathrm{d}x$

b) $\int x(2x-4) \, \mathrm{d}x$

c) $\int x(x+3)(x-3) \, \mathrm{d}x$

d) $\int (x+3)^3 \, \mathrm{d}x$

e) $\int (1-2x)^2 \, \mathrm{d}x$

f) $\int (3x^2+x)^3(6x+1) \, \mathrm{d}x$

g) $\int x(4x^2+3)^4 \, \mathrm{d}x$

h) $\int \sqrt{x+3} \, \mathrm{d}x$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \, \mathrm{d}x$

j) $\int \frac{2}{x} \, \mathrm{d}x$

k) $\int \frac{1}{3x+1} \, \mathrm{d}x$

l) $\int 3e^{3x} \, \mathrm{d}x$

m) $\int 2xe^{x^2+2x} + 2e^{x^2+2x} \, \mathrm{d}x$

n) $\int \frac{4x+2}{x^2+x+1} \, \mathrm{d}x$

o) $\int 2x\cos(3x^2) \, \mathrm{d}x$

p) $\int 2\sin(x)\cos(x) \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 3.5. Finden Sie die Funktion f, wenn man weiss, dass:

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$ und $f(5) = 54$

b) $f'(x) = 5 - x$ und $f(-2) = -f(2)$

Aufgabe 3.6. Sei $f(x) = \dfrac{2x-7}{x^2-2x-3}$.

a) Erklären Sie, warum man die Stammfunktion von f mit den bekannten Rechenregeln nicht finden kann.

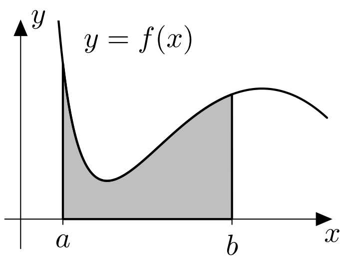
b) Finden Sie die Werte von a und b, so dass:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

c) Finden Sie jetzt eine Stammfunktion von f.

d) Beweisen Sie, dass $F(x) = \frac{9}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-3| + c$ auch eine Stammfunktion von f ist.

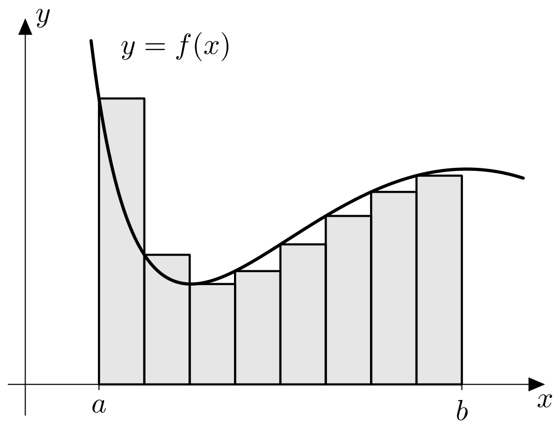
3.3 Das bestimmte Integral

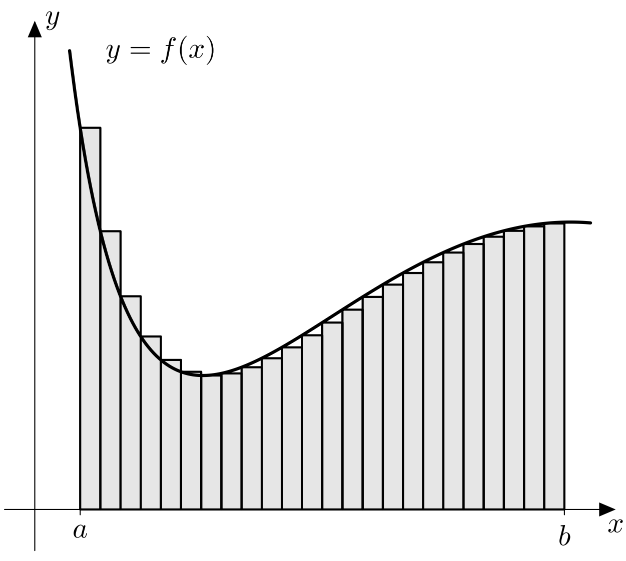


In dieser Sektion möchten wir Flächeninhalte, die durch Kurven begrenzt sind, berechnen. Das bestimmte Integral ermöglicht es, den Flächeninhalt zwischen einer Kurve, der x-Achse und zwei vertikalen Geraden zu berechnen.

Die Idee ist die folgende: um den Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ über dem Intervall $[\ a\ ;\ b\ ]$ näherungsweise zu bestimmen, werden Rechtecke gleicher Breite einbeschrieben; ihre Höhen ergeben sich jeweils als Funktionswert an der linken Intervallgrenze. Die Länge von jedem Intervall ist $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
Der Flächeninhalt von einem Rechteck ist also gleich $f(x_i) \cdot \Delta x$.
Dann ist die Gesamtfläche:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$





Natürlich wird der Flächeninhalt präziser, wenn n grösser wird, da der „Fehler“ bei jedem Rechteck kleiner wird. Es ist dann natürlich zu denken, dass man den genauen Flächeninhalt findet, indem man unendlich viele Rechtecke braucht. Das heisst:

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Definition. Das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ ist der Grenzwert

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Dieser Grenzwert schreiben wir aber eher: $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$ (lies: Integral von $f(x)\mathrm{d}x$ von a bis b).

Die Zahlen a und b sind die untere und obere Grenzen und x ist die Integrationsvariable.

Bemerkung. Der Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

ist praktisch unbrauchbar (viel zu lange Berechnungen). Wenn man aber eine Stammfunktion von $f(x)$ kennt, dann kann man den folgenden Satz brauchen:

Satz. *Hauptsatz der Integralrechnung: sei f stetig in dem Intervall $[a;b]$. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f in diesem Intervall, dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beispiele. Berechnen Sie die folgende Integrale:

a) $\int_0^4 x\ \mathrm{d}x$

b) $\int_2^7 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 e^{-u}\ \mathrm{d}u$

Aufgabe 3.7. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_1^4 x^2\ \mathrm{d}x$

b) $\int_0^3 3x^2\ \mathrm{d}x$

c) $\int_1^5 \frac{x^2}{2}\ \mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 \frac{3x^3}{5}\ \mathrm{d}x$

e) $\int_0^2 2x^3 - 3x^2 + x - 3\ \mathrm{d}x$

f) $\int_{-1}^2 u^2 + 1\ \mathrm{d}u$

g) $\int_{-2}^2 v^3 - 3v\ \mathrm{d}v$

h) $\int_{-3}^3 \frac{3x^2}{5} + 4\ \mathrm{d}x$

i) $\int_0^\pi \sin(x)\ \mathrm{d}x$

j) $\int_{-\pi}^\pi \cos(2x)\ \mathrm{d}x$

Aufgabe 3.8. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^2 (1-x)^3 \, \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \cdot \cos(x^2) \, \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

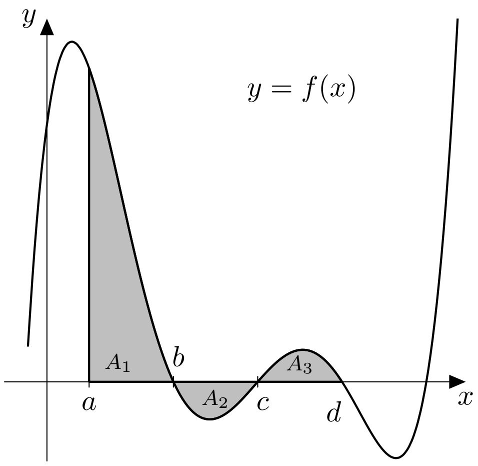
f) $\displaystyle\int_{-3}^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-5}^{-1} \frac{1}{3x} \, \mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^3} \, \mathrm{d}x$

3.4 Flächenberechnungnen mit dem Integral

3.4.1 Fläche zwischen einem Graph und der x-Achse



Der Inhalt $A = A_1 + A_2 + A_3$ der in der Figur gefärbten Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse in den Grenzen $x = a$ und $x = d$ erhält man nicht durch das Integral $\int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$; das Integral gibt den Wert der Flächenbilanz an, da es die Flächen A_1 und A_3 oberhalb der x-Achse positiv und die Fläche A_2 unterhalb der x-Achse negativ zählt. Da f in $[a;b]$ sowohl positive als auch negative Funktionswerte annimmt, muss man die Inhalte der Teilflächen getrennt berechnen. Dabei ist zu beachten, dass Flächeninhalte nie negativ werden können.

In diesem Fall gilt also:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \left| \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \right| + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

Das generelle Vorgehen ist folgendes:

1. Bestimmen aller Nullstellen von f in $[a;b]$.
2. Ermitteln des Vorzeichens der Funktionswerte $f(x)$ in den Teilintervallen.
3. Berechnen der Inhalte der Teilflächen und Addieren der Werte.

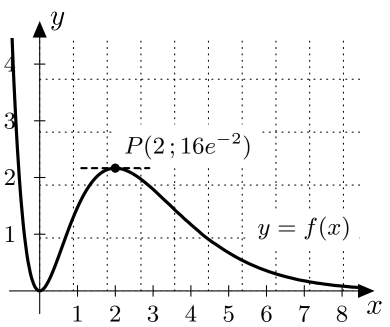
Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 4$ begrenzt wird.

Aufgabe 3.9. Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + x + 6$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, von der x-Achse und den Geraden $x = -5$ und $x = 5$ begrenzt wird.

Aufgabe 3.10. Bestimmen Sie jeweils die Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschliesst.

a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ **b)** $f(x) = 6x + x^2 - x^3$

Aufgabe 3.11. f ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Man weiss, dass $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x}$, mit a, b, $c \in \mathbb{R}$.



a) Finden Sie die Werte von a, b und c, in dem Sie Informationen von dem gegebenen Graphen benutzen.

b) Zeigen Sie, dass $F(x) = -4(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f, der x-Achse, und den Geraden $x = 0$ und $x = 2$.

3.4.2 Fläche zwischen zwei Graphen

Beispiel. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$.

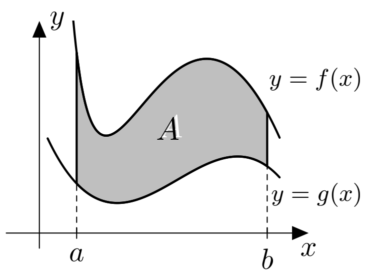
Bemerkung. In diesem Beispiel haben wir den Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen mit der folgende Regel berechnet:

$$A = \text{obere Fläche} - \text{untere Fläche}$$

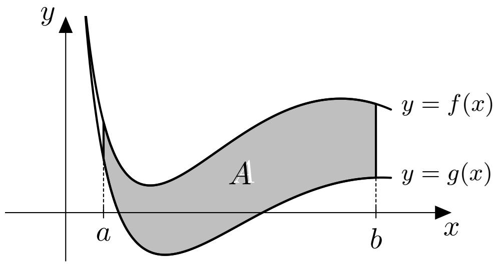
Dazu gibt es der folgende Satz:

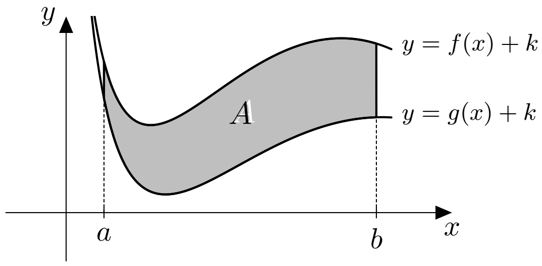
Satz. *Gegeben sind zwei im Intervall $[a;b]$ stetige Funktionen f und g, und $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a;b]$. Dann berechnet man den Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a;b]$ folgenderweise:*

$$A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x$$



Bemerkung. Diese Formel scheint sehr gut zu funktionieren, wenn die Graphen von f und g oberhalb der x-Achse sind. Muss man die Formel ändern, falls f oder g negativ sind ? Die Graphen hier unten zeigen, dass es nicht nötig ist !





Aufgabe 3.12. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g.

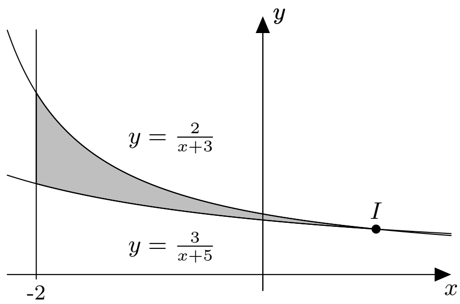
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 2x + 5$

b) $f(x) = x^3 - x^4$ $\qquad$ $g(x) = x - x^2$

Aufgabe 3.13. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Geraden $x = 1$, $x = 2$, dem Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ und ihren schiefen Asymptote.

Aufgabe 3.14.

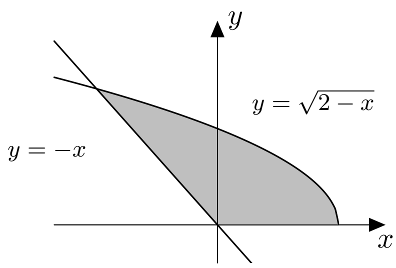
Berechnen Sie den grauen Flächeninhalt.



Aufgabe 3.15. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen den Geraden $x = 1$, $x = 2$, $y = 3x$ und der Kurve $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$

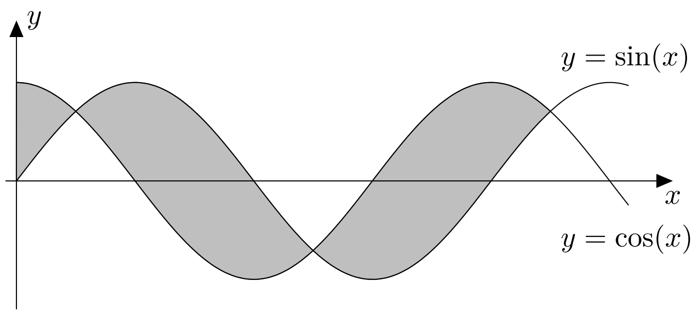
Aufgabe 3.16.

Berechnen Sie den grauen Flächeninhalt.



Aufgabe 3.17.

Berechnen Sie den grauen Flächeninhalt.



Aufgabe 3.18. Bestimmen Sie den Wert von k, mit $k > 0$.

a) $\displaystyle\int_4^k x + 9 \; \mathrm{d}x = 28$

b) $\displaystyle\int_4^k x^2 - 3x + 7 \; \mathrm{d}x = \frac{129}{2}$

c) $\displaystyle\int_2^8 \frac{k}{x} \; \mathrm{d}x = 4\ln(2)$

d) $\displaystyle\int_0^k x^2 + x + 1 \; \mathrm{d}x = \int_0^k x^2 + 3 \; \mathrm{d}x$

Aufgabe 3.19. Bestimmen Sie $a > 0$, so dass die Kurve $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche einschliesst, die gleich 6 ist.

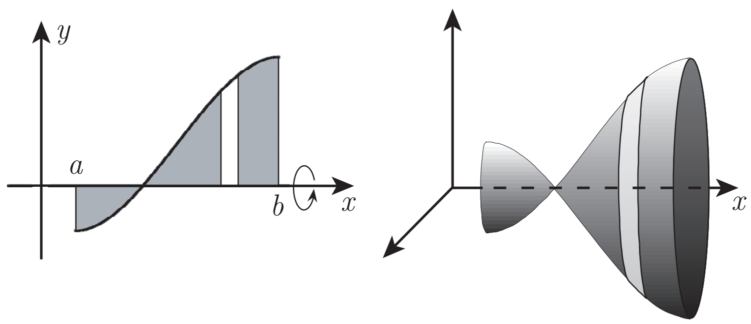
Aufgabe 3.20. Bestimmen Sie $m > 0$, so dass die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ und $g(x) = mx$ gleich 9 ist.

Aufgabe 3.21. Man betrachtet den Graphen der Funktion $f(x) = 2x - 2$ im Intervall $[0; 18]$. Dieser Graphen schliesst mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Wert von $c > 0$, so dass die Gerade $x = c$ diese Fläche in zwei Teile mit gleicher Fläche teilt.

Aufgabe 3.22. Bestimmen Sie $a > 0$, so dass die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = a^2 - \frac{x^2}{4}$ und der x-Achse gleich 8 ist.

3.5 Volumen

Ziel dieses Kapitels ist es, Ihnen eine der Anwendungen der Integralrechnung vorzustellen. Gegeben ist eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f. Der Graph von f schliesst mit der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eine Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Dreh- oder **Rotationskörper**.



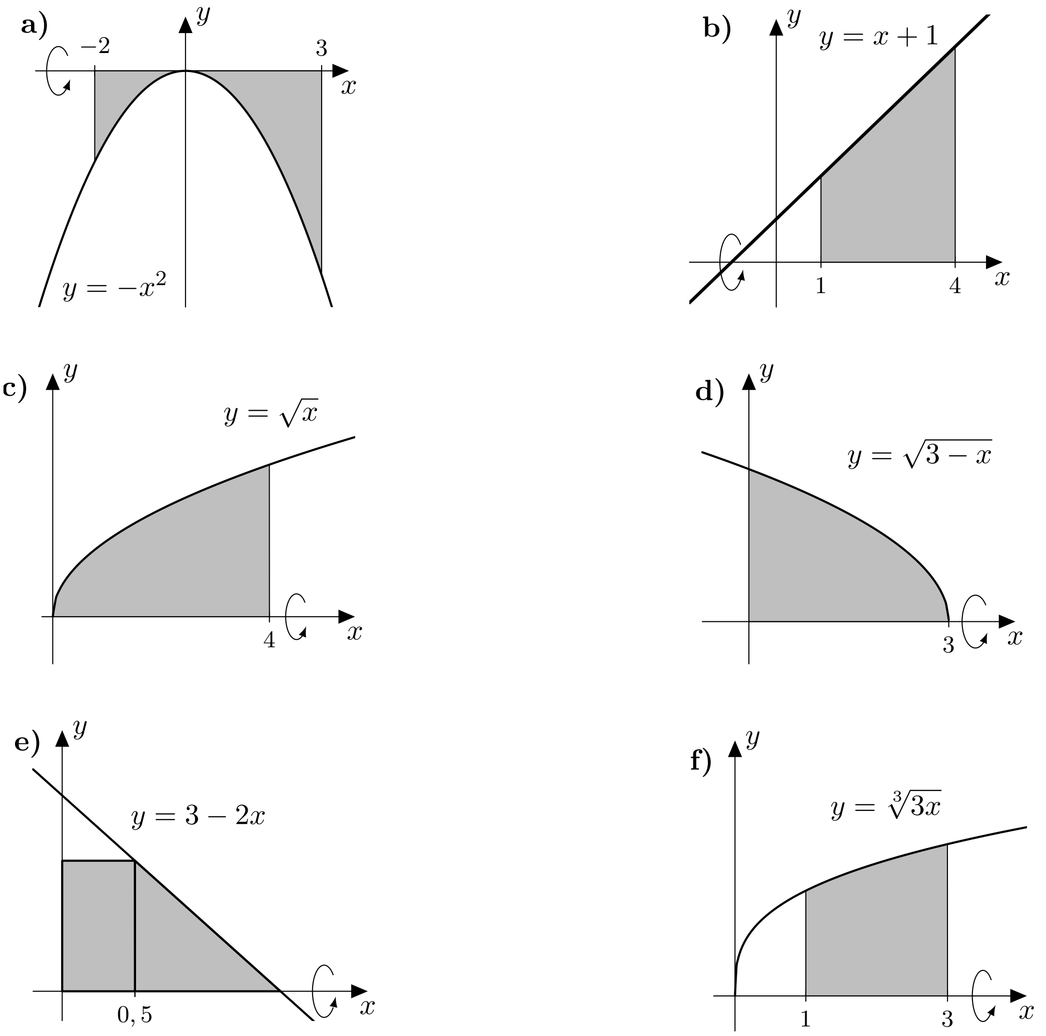
Die Berechnung des Volumens V dieses Rotationskörpers K schliesst sich eng an das Verfahren zur Bestimmung von Flächeninhalten unter Graphen. Dabei wird $[a; b]$ wieder in n Teilintervalle gleicher Länge Δx eingeteilt. Zu jedem Teilintervall gibt es einen Zylinder, dessen Volumen man einfach berechnen kann. Damit erhält man für das Volumen von K die Summe :

$$V = \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x))^2 \cdot \Delta x$$

Für $n \to +\infty$ kann man das Volumen mit der folgenden Formel berechnen:

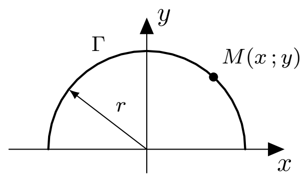
$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

Aufgabe 3.23. Die graue Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.



Aufgabe 3.24. Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass das Volumen einer Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ist.

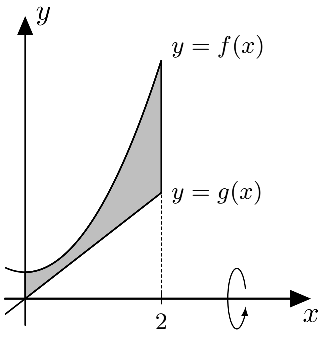
a) Zeigen Sie, dass $M(x; y)$ sich auf dem oberen Halbkreis befindet, wenn $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.



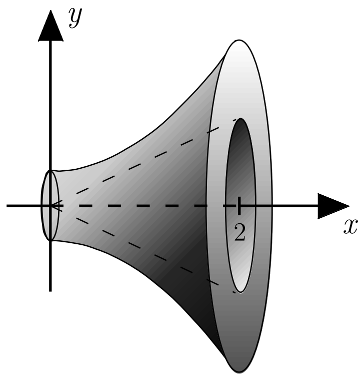
b) Bestimmen Sie damit die Funktion, die zu diesem Halbkreis entspricht und bestimmen Sie die Definitionsmenge.

c) Berechnen Sie das Volumen der Kugel.

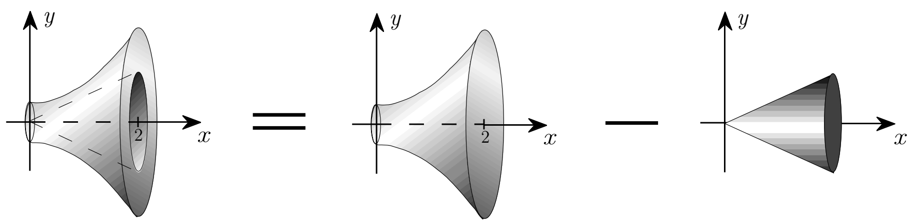
Gegeben sind die auf dem Intervall $[a;b]$ stetigen Funktionen f und g mit $f(x) \geq g(x)$. Ihre Graphen schliessen mit den Geraden $x = a$ und $x = b$ eine Fläche vollständig ein. Rotiert diese Fläche nun um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper, dessen äussere Form durch den Graphen von $f(x)$ geformt ist, dessen Innenraum, der hohl ist, aber durch die Rotation des Graphen der Funktion $g(x)$ bestimmt wird.



$\Longrightarrow$



Für das Gesamtvolumen subtrahieren sich also die durch f und g bestimmten Rotationskörper:



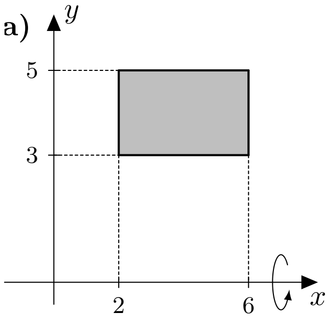
Dann gilt:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x - \pi \int_a^b (g(x))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$$

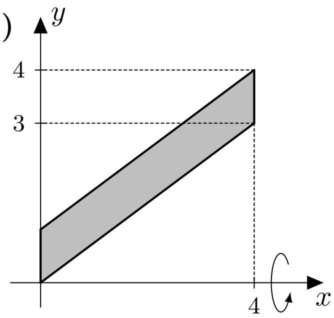
Beispiel. Die graue fläche hier oben ist durch $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = x$ definiert. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Aufgabe 3.25. Die graue Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

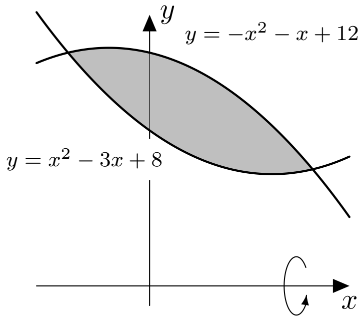
a)



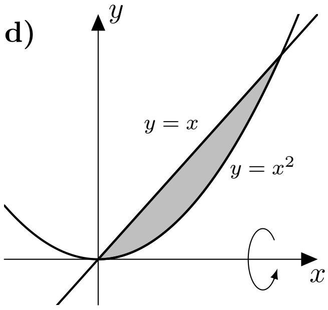
b)



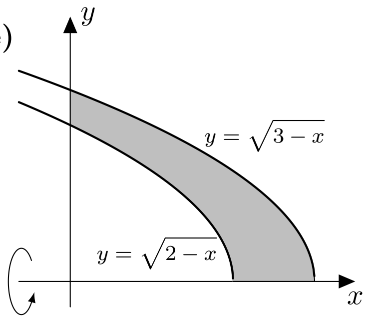
c)



d)



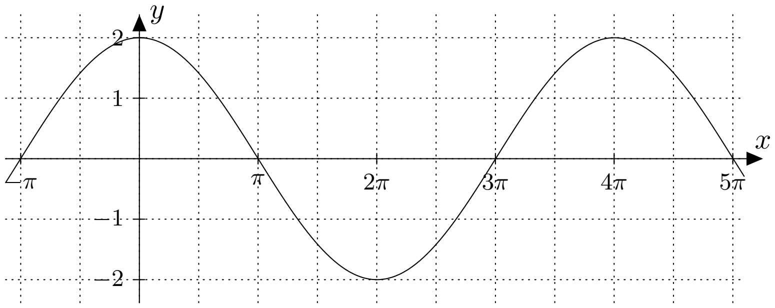
e)



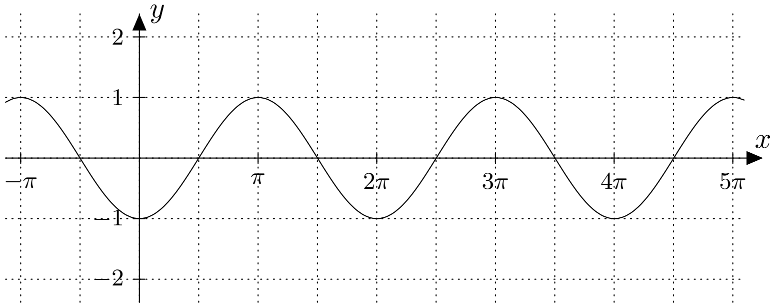
4 Lösungen

Aufgabe 1.1.

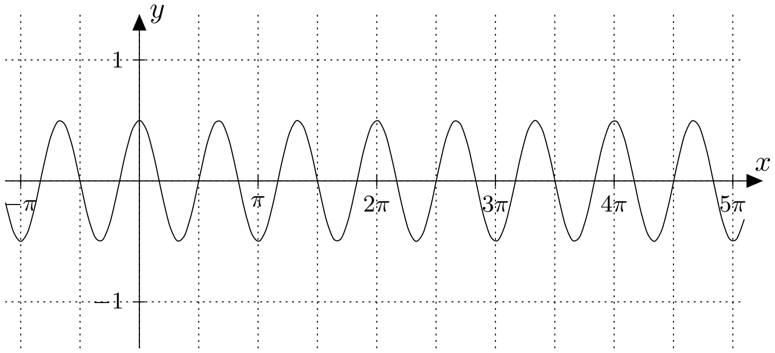
a)



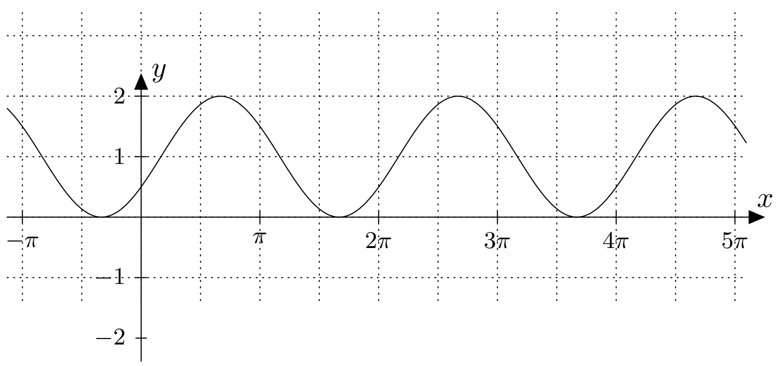
b)



c)



d)



Aufgabe 1.2. a) 3, **b)** 2, **c)** 4, **d)** 1

Aufgabe 1.3. Für die ganze Aufgabe ist $k \in \mathbb{Z}$.

a) $L = \{120° + k \cdot 360°\} \cup \{240° + k \cdot 360°\}$

b) $L = \{18{,}67° + k \cdot 120°\} \cup \{41{,}33° + k \cdot 120°\}$

c) $L = \{-37,02° + k \cdot 180°\}$

d) $L = \varnothing$

e) $L = \{158,75° + k \cdot 360°\}$

f) $L = \{60° + k \cdot 360°\} \cup \{-240° + k \cdot 360°\}$

g) $L = \left\{\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \{\frac{-\pi}{12} + k \cdot 2\pi\}$

h) $L = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \{k \cdot 2\pi\}$

i) $L = \{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi\right\}$

j) $L = \left\{\frac{-5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{-7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\}$

k) $L = \left\{\frac{-5\pi}{12} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right\}$

l) $L = \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$

Aufgabe 1.4. Für die ganze Aufgabe ist $k \in \mathbb{Z}$.

a) $L = \{k \cdot \pi\}$

b) $L = \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right\}$

c) $L = \{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\}$

d) $L = \{\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \{k \cdot 2\pi\}$

e) $L = \left\{\frac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}\right\}$

f) $L = \{41,81° + k \cdot 360°\} \cup \{138,19° + k \cdot 360°\}$

g) $L = \{-\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\}$

h) $L = \left\{\frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi\right\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\}$

i) $L = \left\{\frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi\right\}$

j) $L = \{\pm 115,5° + k \cdot 360°\}$

k) $L = \{\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi/2\}$

l) $L = \{\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\}$

Aufgabe 1.5. 4 Mal.

Aufgabe 1.6.

a) $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$

b) $f'(x) = x(2\cos(x) - x\sin(x))$

c) $f'(x) = -\sin(x) - 2\tan^2(x) - 2$

d) $f'(x) = \dfrac{x - \sin(x)\cdot\cos(x)}{x^2\cos^2(x)}$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)+1}$

f) $f'(x) = f'(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x) + x\sin(x) - x\cos(x)}{2\sin(x)\cos(x)+1}$

g) $f'(x) = 3\tan^2(3x) + 3$

h) $f'(x) = -3x^2\sin(x^3)$

i) $f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$

j) $f'(x) = \dfrac{-\cos(1/x)}{x} + \sin(1/x)$

k) $f'(x) = 2\cos(2x+5)$

l) $f'(x) = -\frac{1}{2}x\sin\left(\dfrac{x^2}{4}\right)$

m) $f'(x) = \sin(x^2) + 2x(x+1)\cos(x^2)$

n) $f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Aufgabe 1.7. Hinweis: benützen Sie die Beziehung $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Aufgabe 1.8.

a) $t : y = -\dfrac{1}{2}x + 1$

b) $t : y = -x$

Aufgabe 1.9.

Für $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 1.10.

$P_1\left(\dfrac{\pi}{6}; 2\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)$ und $P_2\left(\dfrac{5\pi}{6}; -2\sqrt{3} + \dfrac{5\pi}{3}\right)$

Aufgabe 1.11.

Für $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Aufgabe 1.12.

Für $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Ist das eine Überraschung ?

Aufgabe 1.13.

Für $\alpha = \sin^{-1}(4/5) \cong 0,93$ oder ungefähr $53,13°$. Die Anlegestelle befindet sich etwa 3 km von dem Punkt B entfernt.

Aufgabe 1.14.

Der Winkel $\alpha = \frac{\pi}{6}$ entspricht einem Maximum der Funktion. Dann befindet sich das Minimum am Rand der Definitionsmenge, in diesem Fall ist also $\alpha = \frac{\pi}{2}$. (Es ist zu Fuss schneller).

Aufgabe 1.15.

Das Volumen ist Maximal für $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \cong 0,37$ (oder $21,47°$).

Aufgabe 2.1.

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ S $= \{e\}$

b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ S $= \{1\}$

c) $D_f =]\,4\,;+\infty\,[$ S $= \{e^4 + 4\}$

d) $D_f = \mathbb{R}^*$ S $= \{\pm 1\}$

e) $D_f = \mathbb{R}$ S $= \{\ln(5) - 3\}$

f) $D_f = \mathbb{R}$ S $= \varnothing$

g) $D_f =]\,8/5\,;+\infty\,[$ S $= \{8/3\}$

h) $D_f =]-\infty\,;0\,[\cup]8/5\,;+\infty[$ S $= \{8/3\}$

i) $D_f = \mathbb{R}$ S $= \{10\ln(7)\}$

j) $D_f = \mathbb{R}$ S $= \{\pm\sqrt{\ln(4)}\}$

Aufgabe 2.2.

	D_f	**Nullstellen**	**Vorzeichentabelle**
a)	$]-\infty\,;1/2[$	$x = 1/4$	$1/4 \quad 1/2$ $f(x)$: $+ \;\; 0 \;\; - \;\; \vert$
b)	$]\,0\,;+\infty[-\{1\}$	keine	$0 \quad 1$ $f(x)$: $\vert \;\; - \;\; \Vert \;\; +$
c)	$]-2\,;1[$	$x = -1/2$	$-2 \quad -1/2 \quad 1$ $f(x)$: $\vert \;\; - \;\; 0 \;\; + \;\; \vert$
d)	$]\,0\,;+\infty[-\{e^2\}$	$x = e^{-3}$	$0 \quad e^{-3} \quad e^2$ $f(x)$: $\vert \;\; + \;\; 0 \;\; - \;\; \Vert \;\; +$
e)	$\mathbb{R}$	$x = \pm 1$	$-1 \quad 1$ $f(x)$: $+ \;\; 0 \;\; - \;\; 0 \;\; +$
f)	$]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$	keine	$-1 \quad 0$ $f(x)$: $+ \qquad +$
g)	$\mathbb{R}^*$	$x = -3$	$-3 \quad 0$ $f(x)$: $- \;\; 0 \;\; + \;\; \Vert \;\; +$
h)	$\mathbb{R} - \{-3\}$	keine	-3 $f(x)$: $+ \;\; \Vert \;\; +$

Aufgabe 2.3.

	D_f	**Nullstellen**	$f'(x)$
a)	$\mathbb{R}$	keine	$5e^{5x}$
b)	$\mathbb{R}$	keine	$2xe^{x^2}$
c)	$\mathbb{R}^*$	keine	$-\frac{1}{x^2}e^{1/x}$
d)	$]-\infty\,;5/4[$	$x=1$	$\frac{4}{4x-5}$
e)	$]-\infty\,;0\,[\cup]\,1\,;+\infty[$	$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2x-1}{x(x-1)}$
f)	$\mathbb{R}^*$	keine	$(2x-1)e^{1/x}$
g)	$]\,0\,;+\infty\,[$	$x=e$	$\ln(x)$
h)	$]\,0\,;e\,[\cup]e\,;+\infty[$	$x=e^2$	$\frac{3}{x(\ln(x)-1)^2}$
i)	$\mathbb{R}$	$x=\ln(2)$ und $x=0$	$(2e^x-3)\,e^x$

Aufgabe 2.4.

a) $t: y=(e+3)x$

Aufgabe 2.5.

a) $K(10)\cong 3,33$ $K(20)\cong 5,48$ $K(30)\cong 5,14$ $K(70)\cong 3,53$

b) Die Lungenkapazität ist am grössten im alter von 20,09 Jahren.

Aufgabe 2.6.

a) $P(0;1)$ und $Q(0;0)$ **b)** $P\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$ und $Q\left(\frac{1}{2};e^{1/2}-2\right)$

Aufgabe 2.7.

a) 0^+ **b)** 0^+ **c)** $-\infty$ **d)** 0^+

e) 0^- **f)** $+\infty$ **g)** $+\infty$ **h)** 0^+

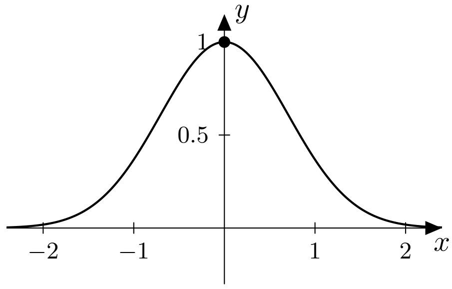
Aufgabe 2.8.

a) 0 **b)** $e^{1/2}$ **c)** 1

d) 0 **e)** $\ln(3)$ **f)** $-\infty$

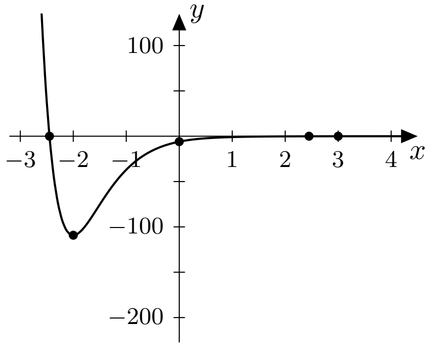
Aufgabe 2.9.

a)



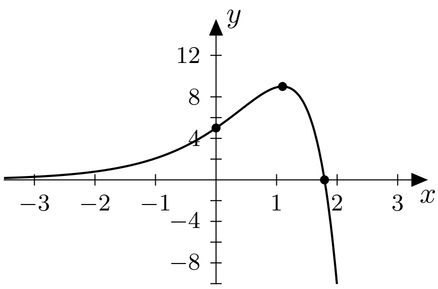
- $D_f = \mathbb{R}$
- $N_f = \varnothing$
- HA : $y = 0$
- $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$
- Max $(0\,;1)$
- y-Achsenabschnitt: $y = 1$

b)



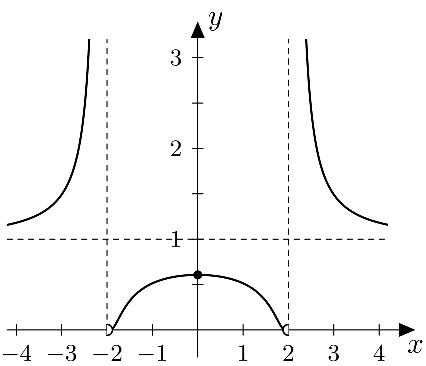
- $D_f = \mathbb{R}$
- $N_f = \{\pm\sqrt{6}\}$
- HAR: $y = 0$
- $f'(x) = -2(x-3)(x+2) \cdot e^{-2x}$
- Min $(-2\,;-2e^4)$
- Max $(3\,;3e^{-6})$
- y-Achsenabschnitt $y = -6$

c)



- $D_f = \mathbb{R}$
- $N_f = \{\ln(6)\}$
- HAL: $y = 0$
- $f'(x) = -2e^x(e^x - \ 3)$
- Max $(\ln(3)\,;9)$
- y-Achsenabschnitt: $y = 5$

d)



- $D_f = \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$
- $N_f = \varnothing$
- VA: $x = -2^-$ und $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0^+$ (Grenzpunkt $(-2^+;0^+)$)
- VA: $x = 2^+$ und $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0^+$ (Grenzpunkt $(2^-;0^+)$)
- HA: $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-4)^2} \cdot e^{2/(x^2-4)}$
- Max $(0\,;e^{-1/2})$ und y-Achsenabschnitt

e)

- $D_f = \mathbb{R}^*$
- $N_f = \{1/2\}$
- VA: $x = 0$
- HAR: $y = 0$
- $f'(x) = \left(\dfrac{(-2x-1)(x-1)}{2x^2}\right) \cdot e^{-x}$
- Max $(1\,;1/2e^{-1})$ Min$(-1/2\,;2e^{1/2})$

f)

- $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- $N_f = \varnothing$
- VA: $x = -1^+$ und $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0^+$ (Grenzpunkt $(-1^-;0^+)$)
- HA: $y = 1$
- $f'(x) = \left(\dfrac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2}\right) \cdot e^{\frac{x^2}{x^3+1}}$
- Max $(\sqrt[3]{2}\,;1{,}7)$ Min$(0\,;1)$ und y-Achsenabschnitt

g)

- $D_f = \mathbb{R}$
- $N_f = \{0; -3/2\}$
- VA: keine
- HAR: $y = 0$
- $f'(x) = ((-2x+3)(x+1)) \cdot e^{-x}$
- Min $(-1\,;-e)$ Max$(3/2\,;9e^{-3/2})$
- y-Achsenabschnitt: $y = 0$

Aufgabe 3.1.

a) $4x + c$ **b)** $3x^2 + c$ **c)** $\frac{1}{3}x^3 + c$

d) $-\frac{1}{2x^2} + c$ **e)** $\sqrt{x} + c$ **f)** $x^5 + c$

g) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$ **h)** $3\sqrt[3]{x^5} + c = 3x\sqrt[3]{x^2} + c$ **i)** $2x^4 + c$

Aufgabe 3.2.
Ja, da $F'(x) = G'(x)$.

Aufgabe 3.3.

a) $f(x) = 10x - 3$ **b)** $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 3.4.

a) $F(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c$ **b)** $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + c$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + c$ **d)** $F(x) = \frac{1}{4}(x+3)^4 + c$

e) $F(x) = -\frac{1}{6}(1-2x)^3 + c$ **f)** $F(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 + x\right)^4 + c$

g) $F(x) = \frac{1}{40}\left(4x^2 + 3\right)^5 + c$ **h)** $F(x) = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c$

i) $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$ **j)** $F(x) = 2\ln(|x|) + c$

k) $F(x) = \frac{1}{3}\ln(|3x+1|) + c$ **l)** $F(x) = e^{3x} + c$

m) $F(x) = e^{x^2+x} + c$ **n)** $F(x) = 2\ln\left(|x^2 + x + 1|\right) + c$

o) $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x^2\right) + c$ **p)** $F(x) = \left(\sin(x)\right)^2 + c$

Aufgabe 3.5.

a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$

Aufgabe 3.6.

a) Weil man die Funktion nicht wie $\frac{u'(x)}{u(x)}$ schreiben kann.

b) $a = 5/4$ und $b = -5/4$

c) $F(x) = \ln|x^2 - 2x - 3| + \frac{5}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{4}\ln|x-3| + c$

d) Zeigen Sie, dass $F'(x) = f(x)$.

Aufgabe 3.7.

a) $\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = 21$

b) $\left.x^3\right|_0^3 = 27$

c) $\left.\frac{x^3}{6}\right|_1^5 = \frac{62}{3}$

d) $\left.\frac{3x^4}{20}\right|_0^1 = \frac{3}{20}$

e) $\left.\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\right|_0^2 = -4$

f) $\left.\frac{u^3}{3} + u\right|_{-1}^2 = 6$

g) $\left.\frac{v^4}{4} - \frac{3v^2}{2}\right|_{-2}^2 = 0$

h) $\left.\frac{x^3}{5} + 4x\right|_{-3}^3 = \frac{174}{5}$

i) $\left.-\cos(x)\right|_0^\pi = 2$

j) $\left.\frac{1}{2}\sin(2x)\right|_{-\pi}^\pi = 0$

Aufgabe 3.8.

a) $\left.\frac{-(1-x)^4}{4}\right|_0^2 = 0$

b) $\left.\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}\right|_0^3 = \frac{14}{3}$

c) $\left.-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right|_1^3 = \frac{2}{9}$

d) $\left.\frac{1}{2}\sin\left(x^2\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\sin\left(4\pi^2\right)$

e) $\left.\frac{-\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$

f) $\left.\frac{-e^{-2u}}{2}\right|_{-3}^2 = \frac{e^6}{2} - \frac{e^{-4}}{2}$

g) $-\frac{\ln(5)}{3}$

h) $\left.\frac{-3}{4\left(x^2+1\right)^2}\right|_0^1 = \frac{9}{16}$

Aufgabe 3.9.

$\mathcal{F} = 65$

Aufgabe 3.10.

a) $\mathcal{F} = \frac{256}{27}$ **b)** $\mathcal{F} = \frac{253}{12}$

Aufgabe 3.11.

a) $a = 4$, $b = c = 0$ **b)** Zeigen Sie, dass $F'(x) = f(x)$ **c)** $\mathcal{F} = 8 - 40e^{-2}$

Aufgabe 3.12.

a) $\mathcal{F} = 9$ **b)** $\mathcal{F} = \dfrac{1}{2}$

Aufgabe 3.13.

$\mathcal{F} = \frac{1}{2}$

Aufgabe 3.14.

$\mathcal{F} = \ln(2)$

Aufgabe 3.15.

$\mathcal{F} = \frac{3}{8}$

Aufgabe 3.16.

$\mathcal{F} = \frac{10}{3}$

Aufgabe 3.17.

$\mathcal{F} = 5\sqrt{2} - 1 \cong 6{,}07$

Aufgabe 3.18.

a) $k = 6$ **b)** $k = 7$ **c)** $k = 2$ **d)** $k = 4$

Aufgabe 3.19.

$a = 2\sqrt{2}$

Aufgabe 3.20.

$m = \frac{3}{2}$

Aufgabe 3.21.

$c = 13$

Aufgabe 3.22.

$a = \sqrt[3]{3}$

Aufgabe 3.23.

a) $\mathcal{V} = 55\pi$ **b)** $\mathcal{V} = 39\pi$

c) $\mathcal{V} = 8\pi$ **d)** $\mathcal{V} = \dfrac{9}{2}\pi$

e) $\mathcal{V} = \dfrac{10}{3}\pi$ **f)** $\mathcal{V} \cong 20{,}55$

Aufgabe 3.24.

b) $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ und $D_f = [-r; r]$

c) $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Aufgabe 3.25.

a) $\mathcal{V} = 64\pi$

b) $\mathcal{V} = 16\pi$

c) $\mathcal{V} = 162\pi$

d) $\mathcal{V} = \dfrac{2}{15}\pi$

e) $\mathcal{V} = \dfrac{5}{2}\pi$

Literatur

[1] Lambacher Schweizer 11/12, *Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen*, Klett und Balmer Verlag Zug, 2019

[2] Elemente der Mathematik 12/13, *Grundkurs Nordrhein-Westfalen*, Schroedel, 2000

[3] dtv-Atlas zur Mathematik, *Grundlagen Algebra und Geometrie*, dtv, 1974

[4] Duden, *Rechnen und Mathematik*, Dudenverlag, 2000

[5] Gasser, Steven, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[6] Javet, Jean-Philippe, *Géométrie Analytique*

[7] Morand, Ignace, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[8] Engelberger, Carole, Gunn-Sechehaye, Martin, Morand, Ignace, *Mathematik Lexikon*, 2017

[9] https://www.futura-sciences.com/sciences/personnalites/mathematiques-rene-descartes-203/

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide

[11] https://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie