

KOMBINATORIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Yannis Paquier - Übersetzung: Carole Engelberger

3M



Inhaltsverzeichnis

1	Kombinatorik	1
1.1	Einführung	1
1.2	Das Multiplikationsprinzip und das Bechermodell	2
1.3	Die Permutationen	4
1.4	Die Variationen	8
1.5	Die Kombinationen	10
1.6	Vermischte Aufgaben	13
2	Warscheinlichkeitsrechnung	19
2.1	Einführung	19
2.2	Fachvokabular der Warscheinlichkeitsrechnung	20
2.3	Intuitive Warscheinlichkeitsrechnung...	23
2.3.1	... mithilfe der Kombinatorik	23
2.3.2	... mithilfe von Venn-Diagrammen	26
2.3.3	... mithilfe von Baumdiagrammen	28
2.4	Bernoulli-Versuche und Binomialverteilung	31
2.5	Bedingte Warscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse	35
2.6	Vermischte Aufgaben	40
3	Lösungen	45
3.1	Kombinatorik	45
3.2	Warscheinlichkeitsrechnung	47

Diese Broschüre ist von der französischen Version von Yannis Paquier übersetzt worden. Vielen Dank an Yannis Paquier, Heidi Engelberger, Steven Gasser und Michaela Baumgärtner, deren Dokumente und Korrekturen mir sehr geholfen haben, um dieses Skript zu erstellen. “ Last but not least “, herzlichen Dank an Amina Salifu und Nicola Gut der Klasse 3CAVCI4 (Schuljahr 2021-2022) für das schöne Bild, das sich auf der ersten Seite dieser Broschüre befindet.

Kontakt : carole.engelberger@eduvaud.ch

1 Kombinatorik

1.1 Einführung

Die Kombinatorik ist ein Gebiet der Mathematik, das sich mit verschiedenen Abzählmethoden beschäftigt. Wir werden Methoden kennenlernen, die es uns ermöglichen, z.B. folgende Fragen zu beantworten:

- Auf wieviele Arten kann man Bücher in ein Büchergestell einräumen ?
- Auf wieviele Arten können sich fünfzehn Schüler in einer Klasse mit 28 Plätze hinsetzen ?
- Aus einem Kartenspiel werden 5 Karten gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 4 Karten derselben Farbe zieht ?

Die Kombinatorik ist also die Untersuchung des Abzählens.

Der Anfang der Kombinatorik kann etwa im XVII Jahrhundert in Europa datiert werden, als die Mathematiker dieser Epoche, besonders Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre de Fermat (1601-1665), sich für Glücksspiele interessiert haben. Man findet aber schon in China um etwa 2900 v. Chr. und in Griechenland um 330 v. Chr., Spuren von Zählmethoden. Auch arabische Mathematiker entwickelten und verwendeten solche Methoden bereits im 9. Jahrhundert.



Blaise Pascal



Pierre de Fermat

1.2 Das Multiplikationsprinzip und das Bechermodell

Beispiel. Die Speisekarte eines Restaurants bietet 2 Vorspeisen, 3 Hauptgänge und 2 Nachtische an. Wie viele verschiedene Mahlzeiten können die Kunden auswählen?

Um sicherzustellen, dass kein Fall vergessen wird, kann man die möglichen Mahlzeiten in Form eines Baumdiagramms darstellen.

Man stellt fest, dass die Anzahl der möglichen Mahlzeiten (12), aus dem Produkt der Anzahl Vorspeisen (2), Hauptgänge (3) und Nachtische (2) stammt. Dieses Beispiel gibt uns eine erste Veranschaulichung eines Grundprinzips der Kombinatorik, das *Multiplikationsprinzip*.

Das Multiplikationsprinzip

Falls ein Zufallsexperiment in mehrere Teile aufgeteilt werden kann, dann ist die totale Anzahl der Ausgänge gleich dem Produkt der Ausgänge in jedem Teil: kann ein Vorgang auf n_1 verschiedene Arten ausgeführt werden, danach ein weiterer auf n_2 verschiedene Arten, dem folgen ein dritter auf n_3 verschiedene Arten, und so weiter, dann gibt es $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots$ verschiedene Möglichkeiten, den auf diese Weise (in dieser Reihenfolge) beschriebenen Gesamtvorgang auszuführen.

In der Kombinatorik geht es also nicht darum, alle Ausgänge aufzuzählen (es wäre viel zu lang!), sondern man möchte wissen **wie viele** Ausgänge es gibt.

Machen wir mit dem Beispiel hier oben weiter. Man möchte durch Rechnen die Anzahl verschiedener Mahlzeiten finden, die es gibt (12). Um das zu machen kann man drei Becher zeichnen: der erste Becher für die Vorspeise, der zweite für die Hauptspeise, der dritte für den Nachtisch. In jedem Becher schreibt man die Anzahl Möglichkeiten die es gibt. Am Ende braucht man dann das Multiplikationsprinzip um die Lösung zu finden.

Beispiel. Ein Männerchor, in dem 9 Tenöre und 12 Bässe singen, möchte ein Komitee bilden. Dafür muss man einen Präsidenten, einen Vize-Präsidenten, einen Sekretär und einen artistischen Direktor auswählen. Auf wie viele Arten kann man das machen, wenn der Präsident ein Tenor und der Sekretär ein Bass sein soll ?

Beispiele.

a) Wie viele 4-stellige Zahlen, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, gibt es ?

b) Wie viele davon sind durch 5 teilbar ?

Aufgabe 1.1. Eine Person hat in ihrem Schrank 4 Pullis und 6 paar Hosen. Auf wie viele Arten kann sich diese Person am Morgen anziehen ?

Aufgabe 1.2. Eine Person möchte einen neuen Wagen kaufen. Sie stellt fest, dass sie nicht nur die Wahl zwischen 8 Modellen hat, sondern dass es jedes Modell in 15 verschiedenen Farben und mit 3 verschiedenen Motorisierungen gibt, jeweils mit oder ohne Automatikgetriebe. Wie viele verschiedene Wagen gibt es ?

Aufgabe 1.3. Wie viele 5-stellige Zahlen, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt, gibt es:

- a) wenn die Zahlen ungerade,
- b) wenn die zwei ersten Ziffern jeder Zahl gerade sein müssen ?

Aufgabe 1.4. Wie viele 4-stellige Zahlen gibt es:

- a) wenn man jede Ziffer mehrmals brauchen kann ?
 - b) wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommt und die Zahl gerade sein muss ?
-

Aufgabe 1.5. In einigen Ländern beginnen Autokennzeichen mit einem Buchstaben, gefolgt von 5 Ziffern. Wie viele verschiedene Nummernschilder gibt es, wenn :

- a) die erste Ziffer nicht gleich 0 sein darf ?
 - b) die Ziffern 1 und 0, sowie die Buchstaben O und I nicht verwendet werden dürfen ?
-

Aufgabe 1.6. Es gibt 6 Wege, die von A nach B führen, und 4, die von B nach C führen. Auf wie viele Arten kann man:

- a) von A nach C gehen, wenn man durch B gehen muss ?
 - b) von A nach C und zurück gehen, wenn man durch B gehen muss ?
 - c) von A nach C und zurück gehen, wenn man durch B gehen muss und denselben Weg nicht zweimal gehen darf ?
-

1.3 Die Permutationen

Jetzt kümmern wir uns um einen Sonderfall des Bechermodells, nämlich wenn es genauso viele Objekte wie Becher gibt. Das nennt man eine Permutation.

Beispiel. Bestimmen Sie die Anzahl der Anagramme des Wortes KLAVIER.

Definition. Eine Permutation ist eine Anordnung (mit Reihenfolge) aller Objekte.

Um die Schreibweise zu vereinfachen wird dafür eine sehr praktische Abkürzung definiert.

Definition. Man spricht *n Fakultät* ($n \in \mathbb{N}^*$) und schreibt $n!$, das Produkt aller ganzen positiven Zahlen die kleiner oder gleich n sind :

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Zum Beispiel: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40'320$$

Bemerkungen.

- Es gilt $0! = 1$;
- Auf Ihrem Taschenrechner werden Sie eine Taste $x!$ oder $n!$ finden;
- Die Funktion $f(n) = n!$ ist rekursiv : $n! = n \cdot (n - 1)! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! = \dots$

Die Antwort des Beispiels hier oben ist also $7!$. Allgemeiner führt das Bechermodell zu folgendem Resultat :

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist $n!$

Beispiel. Ein Schüler hat 5 Mathematikbücher, 3 Biologiebücher und 8 Chemiebücher, die alle verschieden sind. Diese Bücher möchte er alle auf ein Bücherregal stellen.

a) Auf wie viele Arten ist das möglich ?

b) Und wenn die Bücher des gleichen Fachgebietes nebeneinander stehen sollen ?

Die nächste Frage ist jetzt: was passiert, wenn man eine Permutation machen soll und es Objekte gibt, die identisch sind ?

Beispiel. Bestimmen Sie die Anzahl der Anagramme des Wortes KONZERTGITARRE.

Bemerkungen.

- Für Permutationen von n Elementen mit r_1, r_2, \dots, r_k Wiederholungen der Elemente $1, \dots, k$, gilt:

$$\bar{P}_n(r_1; r_2; \dots; r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

Beispiel. Wählen Sie den Vornamen oder Namen einer Person aus Ihrer Klasse und berechnen Sie, wie viele Anagramme man damit bilden kann :

.....

Aufgabe 1.7. Armin, Brigitte, Christine und Daniela stellen sich in eine Reihe für ein Gruppenbild auf. Wie viele verschiedene Aufstellungen sind möglich ?

Aufgabe 1.8. Eine Person muss fünf Pakete an fünf verschiedene Kunden liefern. Auf wie viele Arten kann sie das machen:

- wenn sie alle Pakete am selben Tag ausliefert ?
- wenn sie am ersten Tag drei Pakete und am nächsten Tag zwei Pakete ausliefert ?

Aufgabe 1.9. Man möchte, dass sich 5 Herren und 4 Damen auf eine Reihe von 9 Stühlen setzen. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn die Damen sich auf die geraden Plätze setzen sollen ?

Aufgabe 1.10. Bestimmen Sie die Anzahl der Anagramme des Wortes MORGES.

Aufgabe 1.11.

- Bestimmen Sie die Anzahl der Anagramme des Wortes MISSISSIPPI.
- Wie viele davon beginnen und enden mit einem S ?

Aufgabe 1.12. Wie viele verschiedene Wörter kann man mit den Buchstaben des Wortes TOULOUSE bilden, wenn die Konsonanten an der 1., 2. bzw. 7. Position stehen sollen ?

Aufgabe 1.13. Mit den Buchstaben A, M, O, S und U kann man 120 Anagramme bilden. An welcher Stelle würde das Wort SOUMA stehen, wenn man alle Wörter alphabetisch ordnen würde ?

Aufgabe 1.14. Ein Bankkunde erinnert sich, dass 2, 4, 7 und 9 die Ziffern des vierstelligen Codes seiner Kreditkarte sind. Leider kann er sich nicht mehr an die richtige Reihenfolge der Ziffern erinnern. Wie viele Versuche bräuchte er höchstens, um den richtigen Code zu finden ?

Aufgabe 1.15. Dieselbe Frage wie bei Aufgabe 14, jedoch mit den Ziffern 2, 4 und 7, wobei eine dieser Ziffern zweimal im vierstelligen Zahlencode vorkommt.

Aufgabe 1.16. Man hat sieben Spielmünzen: zwei davon mit der Ziffer 1, drei mit der Ziffer 2 und zwei mit der Ziffer 3. Die Münzen mit den selben Ziffern sind identisch.

- a) Wie viele siebenstellige Zahlen kann man mit den 7 Münzen bilden ?
 - b) Wie viele davon sind kleiner als 1'300'000 ?
-

Aufgabe 1.17. Die sieben Frauen und Herren Bundesräte sollen sich für eine Gruppenaufnahme in eine Reihe aufstellen.

- a) Auf wie viele Arten ist dies möglich ?
 - b) Was, wenn die drei Herren Bundesräte nebeneinander sitzen möchten ?
 - c) Was, wenn die vier Frauen auch nebeneinander sitzen möchten ?
 - d) Was, wenn Frauen und Herren alterniert werden sollen ?
-

Aufgabe 1.18. Neun Personen nehmen an einem runden Tisch Platz.

- a) Auf wie viele Arten ist das möglich (es wird nur die relative Position der neun Personen zueinander berücksichtigt) ?
- b) Was, wenn ein Paar unbedingt zusammensitzen möchte ?

1.4 Die Variationen

Man interessiert sich jetzt für einen zweiten Sonderfall des Bechermodells. Wir werden mit einem Fall beginnen, wo alle Objekte verschieden sind.

Beispiel. Bestimmen Sie die Anzahl der Wörter mit vier verschiedenen Buchstaben, die man mit den Buchstaben des Wortes KLAVIER bilden kann.

Definition. Eine *Variation (ohne Wiederholung)* ist eine Anordnung von p verschiedenen Elementen die aus n Elementen ausgesucht werden, mit $1 \leq p \leq n$.

Bemerkungen.

- Im Beispiel hier oben sind die Wörter VIEL und LIVE verschieden. Die Reihenfolge, in der man die Buchstaben schreibt, ist also sehr wichtig.
- Man schreibt A_p^n die Anzahl Variationen von p Objekten, die man aus n Objekten aussucht. Falls man das Bechermodell anwendet, kann man die folgende Formel finden :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$$

Da

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\text{und } n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)! = n! \quad ,$$

erhält man

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{mit } 1 \leq p \leq n$$

Was passiert, wenn man dasselbe Objekt mehrmals brauchen darf ?

Beispiel. Bestimmen Sie die Anzahl der Wörter mit vier Buchstaben, die man mit den Buchstaben des Wortes KLAVIER bilden kann.

Definition. Eine *Variation mit Wiederholung* ist eine Anordnung von p Elemente, die nicht unbedingt verschieden sind, die man aus n Elemente ausgesucht hat (man kann dasselbe Element mehrmals aussuchen).

Bemerkung. Für die Anzahl der Variationen mit Wiederholung schreibt man \bar{A}_p^n , wenn man p Elemente aus n aussuchen muss. Falls man das Bechermodell anwendet, findet man die folgende Formel :

$$\bar{A}_p^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{p\text{- Mal}} = n^p \quad \text{mit } 1 \leq p$$

Beispiel. 1837 stellte der amerikanische Kunstmaler und Tüftler Samuel Morse (1791–1872) sein Morse-Alphabet öffentlich vor. Das in der Telegrafie benutzte Alphabet verwendet Zeichen, die aus zwei verschiedenen Elementen, nämlich Punkt (\cdot) und Strich ($-$), zusammengesetzt sind.

Beispiele:

- Der Buchstabe “ L “ wird durch “ $\cdot - \cdot \cdot$ “ wiedergegeben;
- Der Buchstabe “ R “ durch “ $\cdot - \cdot$ “
- Der Buchstabe “ E “ gar nur durch “ \cdot “

Wie viele verschiedene Zeichen lassen sich aus diesen Elementen bilden, wenn festgesetzt wird, dass zur Bildung eines Zeichens nicht mehr als 5 Elemente verwendet werden können ?

Aufgabe 1.19. Acht Athleten kämpfen um die Medaillen: Gold, Silber und Bronze. Wie viele Medaillenverteilungen sind möglich ?

Aufgabe 1.20.

- a) Wie viele Wörter mit fünf Buchstaben kann man mit den 26 Buchstaben des Alphabets bilden ?
- b) Gleiche Frage, aber alle Buchstaben eines Wortes müssen verschieden sein.

Aufgabe 1.21. Das Sport-Toto war ein Lottospiel, wo man über 13 Fussballspiele wetten musste. Für jedes Spiel gibt es drei mögliche Resultate (gewonnen, verloren, unentschieden). Wie viele verschiedene Wetten kann man machen ?

Aufgabe 1.22. In einem Hochhaus gibt es ein Erdgeschoss und 8 Stockwerke. Ein Lift verlässt das Erdgeschoss mit 5 Personen.

- a) Auf wie viele Arten können diese 5 Personen das Stockwerk auswählen, in welchem sie aussteigen ?
- b) Gleiche Frage, aber in jedem Stockwerk steigt höchstens eine Person aus.

Aufgabe 1.23.

- a) 8 Personen steigen in einen Zug ein. Es sind im Wagen noch 5 Plätze frei. Auf wie viele Arten können sich die 8 Personen hinsetzen ? (Jedes Mal bleiben drei Personen stehen).
- b) 5 Personen steigen in einen Zug ein. Es sind im Wagen noch 8 Plätze frei. Auf wie viele Arten können sich die 5 Personen hinsetzen ?

Aufgabe 1.24.

- a) Wie viele Initialen besteht aus zwei Buchstaben gibt es ?
b) Wie viele Einwohner muss ein Dorf haben, so dass man sicher ist, dass mindestens zwei Einwohner die gleichen Initialen haben ?
-

Aufgabe 1.25. Bei einem Jahrmarktsspiel gibt es 4 Mäuse, die sich in 5 Löcher A, B, C, D und E, verstecken werden. Mehrere Mäuse können das selbe Loch auswählen. Jeder Spieler wettet auf eine Verteilung der Mäuse. Wie viele verschiedene Tipps kann man machen ?

1.5 Die Kombinationen

Beispiel. In einem Gymnasium hat man 5 Schüler ausgewählt, die an einem Volleyballturnier (3 gegen 3) teilnehmen werden. Wie viele verschiedene Mannschaften kann man bilden ?

Zählen wir alle Möglichkeiten auf:

Bemerkung. Was in diesem Fall sehr wichtig ist, ist dass bei einer Kombination nur die Auswahl der Objekte wichtig ist, die Reihenfolge aber nicht. Zum Beispiel ist die Mannschaft $\{1; 2; 3\}$ die gleiche, wie die Mannschaften $\{1; 3; 2\}$, $\{3; 2; 1\}$, usw.

Definition. Eine *Kombination* ist eine Auswahl von p verschiedenen Elementen aus einer Menge von n verschiedenen Elementen. Man schreibt C_p^n oder $\binom{n}{p}$ ($1 \leq p \leq n$).

- $\binom{n}{p}$ ist der Binomialkoeffizient. Man liest “ n über p “.
- C_p^n ist das Zeichen für die Kombination. Man liest “C n p“.

Da das Aufzählen generell nicht möglich (viel zu lang !) ist, betrachten wir ein zweites Mal das Beispiel mit den Volleyballmannschaften und probieren es mit dem Bechermodell aufzulösen.

Bemerkungen.

- Mit der Methode des Bechermodells findet man die Formel :

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \quad \text{mit } 1 \leq p \leq n$$

- Es gilt $C_0^n = 1$ und $C_0^0 = 1$
- Mit den meisten Taschenrechnern ist es möglich, den Wert von C_p^n zu berechnen.
- Kombinationen mit Wiederholungen gibt es auch. Sie sind aber sehr wenig gebraucht, und wir werden sie in diesem Skript nicht untersuchen.

Beispiel. Auf wie viele Arten kann man aus 15 Personen eine Dreiergruppe auswählen ?

Beispiel. Jemand nimmt 9 Karten aus einem Stapel von 36 Karten. Diese 9 Karten nennen wir ein Blatt, wobei die Reihenfolge, in der die Karten gezogen wurden, keine Rolle spielt (die 9 Karten könnte man ja gleichzeitig aus dem Stapel ziehen).

- a) Wie viele Blätter sind möglich ?
- b) Wie viele Blätter mit genau 4 Bauern sind möglich ?
- c) Wie viele Blätter mit mindestens einem Ass gibt es ?

Ein bisschen Historisches. Die Formel C_2^n wurde angeblich schon im 3. Jahrhundert entdeckt. Im 12. Jahrhundert soll der indische Mathematiker Bhāskara (1114-1185) eine Formel für C_p^n vorgeschlagen haben.

Etwas später, im 14. Jahrhundert, hat Gersonide (1288-1344), französischer Mathematiker und Philosoph, in einem Manuskript die Formeln A_p^n und $n!$ beschrieben. Noch bemerkenswerter hat er die Formel $C_p^n = A_p^n/p!$ im selben Manuskript vorgeschlagen. Seine Arbeit blieb aber vertraulich und seine Ergebnisse gerieten in Vergessenheit, wurden aber in den folgenden Jahrhunderten von anderen wiederentdeckt.

Aufgabe 1.26. Ein Tennisturnier wird organisiert. 9 Personen sind angemeldet und alle Teilnehmer spielen genau ein Mal gegen alle anderen Teilnehmer.
Wie viele Spiele werden stattfinden ?

Aufgabe 1.27. Ein Damenkränzchen, das aus 12 Damen besteht, ist dabei, sich nach vollendetem Kaffeegenuss aufzulösen. Wie oft findet ein Händedruck statt, wenn sich jede Dame von jeder anderen mit Händedruck verabschiedet ?

Aufgabe 1.28. Ein Eisstand hat 31 verschiedene Eissorten. Da hängt ein kleines Schild und sagt "Falls Sie ein Eis mit drei verschiedenen Sorten auswählen, gibt es etwa 4500 Möglichkeiten". Stimmt das ? Wie hat der Stand diese Zahl gefunden ?

Aufgabe 1.29. Eine Klasse mit 10 Schülerinnen und 8 Schülern möchte eine siebenköpfige Delegation bilden, die aus mindestens vier Schülerinnen besteht. Auf wie viele Arten ist das möglich ?

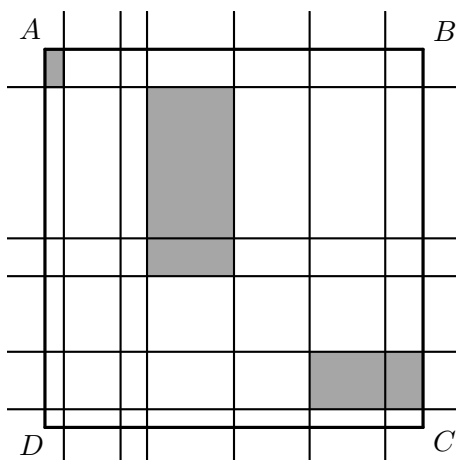
Aufgabe 1.30. Jemand nimmt 5 Karten aus einem Stapel von 36 Karten.

- Wie viele Blätter mit 4 Damen gibt es ?
- Wie viele Blätter mit genau 2 Bauern und 2 Königen sind möglich ?
- Wie viele Blätter mit mindestens einem König gibt es ?
- Wie viele Blätter mit mindestens zwei Damen gibt es ?

Aufgabe 1.31. In einer Fabrik arbeiten 8 Arbeiterinnen und 7 Arbeiter. Es werden Gruppen mit 5 Personen gebildet.

- Wie viele verschiedene Gruppen kann man auswählen ?
- In wie vielen Gruppen gibt es genau 3 Arbeiter ?

Aufgabe 1.32. In einem Rechteck $ABCD$, zeichnet man sechs Parallelen zu AD und fünf Parallelen zu AB . Wie viele verschiedene Rechtecke gibt es in dieser Konfiguration ?



Aufgabe 1.33. Beim Schweizer Zahlenlotto muss man erraten, welche 6 Gewinnzahlen aus den 45 Zahlen $1, 2, 3, \dots, 45$ gezogen werden.

- a) Wie viele verschiedene Lottotips gibt es ?
 - b) Bei wie vielen möglichen Lottotips sind genau 4 Zahlen richtig angekreuzt ?
-

1.6 Vermischte Aufgaben

Welche Methode soll angewendet werden ? Ist es eine Permutation ? Eine Variation ? Eine Kombination ? Gibt es das gleiche Element mehrmals ? Ist die Reihenfolge wichtig ? Diese Fragen müssen Sie sich jedesmal stellen, bevor Sie mit einer Aufgabe anfangen. Das Beispiel hier unten kann Ihnen vielleicht helfen.

Beispiel. In einer Urne sind 6 Spielmünzen. Auf der erste Münze steht die Zahl 1, auf der zweite die 2, usw.

- a) Man nimmt 5 Münzen aus der Urne. Wie viel verschiedene Ziehungen mit 2 geraden und 3 ungeraden Zahlen kann man haben ?

Es ist eine ! Tatsächlich ist in diesem Fall die Reihenfolge nicht wichtig. Die Ziehung $\{1;2;3;4;5\}$ ist die selbe, wie die Ziehung $\{1;3;2;4;5\}$.

b) Man zieht die 6 Münzen und legt sie auf einen Tisch. Wie viele verschiedene sechstellige Zahlen kann man bilden ?

Man muss das brauchen (es ist eine). Da man sich für die Zahlen interessiert, ist die Reihenfolge wichtig. Die Zahlen 123'456 und 132'456 sind verschieden.

c) Man zieht 4 Münzen aus der Urne und legt sie auf einen Tisch. Wie viele vierstellige Zahlen kann man bilden ?

d) Man zieht 4 Münzen aus der Urne. Wie viele verschiedene Ziehungen kann man haben ?

e) Aus der Urne wird 4-mal eine Münze gezogen, die Zahl in der Reihenfolge der Ziehungen notiert und die gezogene Münze jeweils vor der nächsten Ziehung in die Urne zurückgelegt. Wie viele Zahlen kann man damit bilden ?

f) Man zieht 5 Münzen aus der Urne und legt sie folgendermassen auf einen Tisch: zwischen zwei geraden Zahlen ist jeweils eine ungerade Zahl, und umgekehrt. Wie viele verschiedene Zahlen kann man so bilden ?

Aufgabe 1.34. Bei einer Pferdewette wettet man auf den Einlauf der ersten drei von insgesamt 15 Pferden. Man erreicht Gewinnklasse I, wenn man die ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge ihres Einlaufs vorhersagt, und Gewinnklasse II, wenn man die ersten drei Pferde in beliebiger Reihenfolge richtig vorhersagt.

- a) Wie viele Fälle gibt es für die Gewinnklasse I ?
 - b) Wie viele Fälle gibt es für die Gewinnklasse II ?
-

Aufgabe 1.35. Wie viele ganze Zahlen, die kleiner als 10'000, und die nur durch die Ziffern 1, 2, 3 und 4 gebildet sind gibt es, falls:

- a) Wiederholungen erlaubt sind ?
 - b) Wiederholungen nicht erlaubt sind ?
-

Aufgabe 1.36. Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit den 6 Ziffern 2, 3, 5, 6, 7 und 9 bilden, wenn man jede Ziffer mehrmals brauchen darf ? Wie viele davon sind kleiner als 400 ? Gerade ? Durch 5 teilbar ?

Aufgabe 1.37. Ein Schüler muss in einer schriftlichen Prüfung acht von zehn Aufgaben lösen.

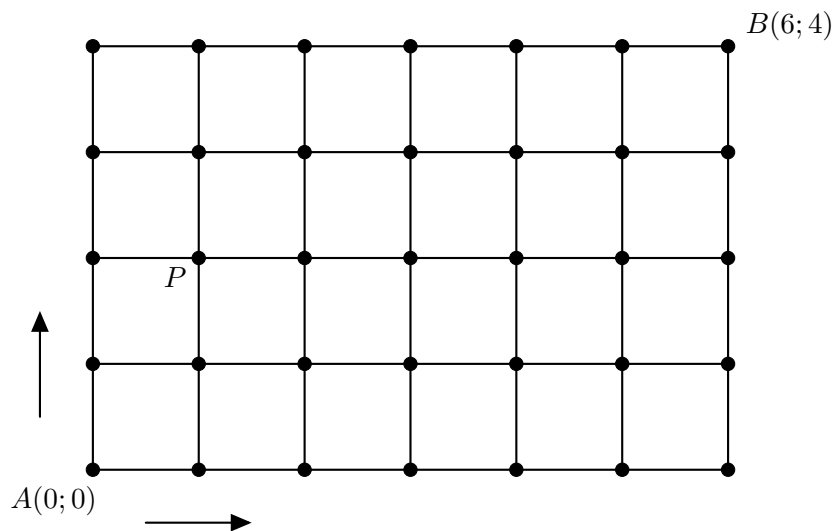
- a) Wie viele Möglichkeiten hat er ?
Wie viele Möglichkeiten bleiben, wenn er
 - b) die ersten drei Aufgaben lösen muss ?
 - c) mindestens vier der ersten fünf Aufgaben lösen muss ?
-

Aufgabe 1.38. Auf wie viele Arten kann man aus einer Zehnergruppe eine Vierergruppe und eine Sechsergruppe bilden ?

Aufgabe 1.39. Man versorgt 6 verschiedene Münzen in drei Schachteln. In jeder Schachtel sollen 2 Münzen sein. Auf wie viele Arten ist das möglich ?

Aufgabe 1.40. Lehrerin X wohnt in A und gibt in B Schule.

- Auf wie viele Arten kann sie ohne Umwege zur Schule fahren ?
- X nimmt auf dem Weg zur Schule Lehrer Y, der in P wohnt, mit. Wie viele Möglichkeiten hat sie jetzt noch ?
- Lehrerin X wählt an einem Morgen einen Weg zur Schule. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lehrer Y mitfahren kann ?



Aufgabe 1.41. Ein Zahlenpalindrom ist eine natürliche Zahl, die rückwärts gelesen denselben Wert hat (z.B. 14741). Wie viele fünfstellige Zahlenpalindrome gibt es ?

Aufgabe 1.42. Aus einem Spiel mit 36 Karten werden 3 Karten gezogen.

- Wie viele Blätter sind möglich ?
- Wie viele Blätter mit genau einem König und zwei Assen gibt es ?
- Wie viele Blätter ohne Ass gibt es ?
- Wie viele Blätter mit mindestens einem Ass gibt es ?
- Wie viele Blätter mit genau einem Ass gibt es ?

Aufgabe 1.43. Wie viele achtstellige Zahlen kann man mit zwei 4, vier 2 und zwei 3 bilden ?

Aufgabe 1.44. Im Musiksaal gibt es zehn Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann.

- Wie viele verschiedene Beleuchtungsarten gibt es ?
- Wie viele verschiedene Beleuchtungsarten gibt es, wenn genau 7 Lampen brennen sollen ?
- Und wenn höchstens 2 Lampen brennen sollen ?
- Und wenn mindestens 1 Lampe brennen soll ?

Aufgabe 1.45. Auf wie viele Arten können die königlichen Ehepaare von England, Spanien, Schweden und Belgien an einem runden Tisch platznehmen, wenn

- a) die Königin von England und die Königin von Schweden nebeneinander,
 - b) die Ehepaare je nebeneinander,
 - c) die vier Frauen und die vier Männer je nebeneinander,
 - d) die Frauen und die Männer in alternierender Folge, sitzen wollen ?
-

Aufgabe 1.46. Man betrachtet die Menge $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Man darf aus dieser Menge jede Zahl höchstens einmal verwenden, um Zahlen zu erstellen. Wie viele :

- a) sechsstellige,
 - b) vierstellige,
 - c) vierstellige, die mit der Ziffer 3 beginnen,
 - d) vierstellige, die die Ziffer 3 enthalten,
 - e) vierstellige, die die Ziffern 3 und 6 enthalten, Zahlen gibt es ?
-

Aufgabe 1.47. In einem Wäschekorb liegen folgende 13 Kleidungsstücke:

- 3 Pullover (ein roter, ein blauer, ein schwarzer)
- 3 T-Shirts (ein rotes, ein blaues, ein schwarzes)
- 2 Hosen (eine rote, eine schwarze)
- 3 identische gelbe Unterhosen
- 2 identische schwarze Socken.

- a) Auf wie viele verschiedene Arten können alle diese Kleidungsstücke an einer Wäscheleine aufgehängt werden ?
- b) Was, wenn eine Hose am Anfang und eine Hose am Ende der Leine hängen soll ?

Die Unterhosen und Socken werden jetzt in den Wäschetrockner gelegt. Im Wäschekorb liegen also nur noch 8 Kleidungsstücke.

Es werden 5 Kleidungsstücke aus dem Korb gezogen. Wie viele verschiedene Ziehungen gibt es:

- c) mit genau 2 Pullovern ?
- d) mit mindestens einem blauen Kleidungsstück ?

Man hängt 5 der 8 Kleidungsstücke aus dem Korb auf die Wäscheleine.

- e) Auf wie viele Arten ist das möglich ?
- f) Was, wenn man den roten Pullover aufhängen muss, das schwarze T-Shirt aber nicht ?
- g) Und wenn man die 3 Pullover nebeneinander aufhängen soll ?

Aufgabe 1.48. In wie vielen Zahlen zwischen 1'000 und 9'999

- a) kommt die Ziffer 3 ein einziges Mal vor ?
 - b) kommt die Ziffer 3 nicht vor ?
 - c) kommt die Ziffer 7 dreimal vor ?
-

Aufgabe 1.49. In Herrn Hitchcocks Bus können 16 Passagiere platznehmen. Die Sitze sind in vier Viererreihen angeordnet, wobei ein Gang durch die Mitte führt. Acht Jungen und acht Mädchen steigen ein. Auf wie viele Arten können sich die 16 Kinder

- a) ohne Einschränkung hinsetzen ?
 - b) hinsetzen, wenn sich alle Mädchen auf der selben Seite des Ganges hinsetzen möchten ?
 - c) wenn sich in jeder Reihe zwei Paare hinsetzen ?
-

Aufgabe 1.50. Aus wie vielen Personen besteht eine Gesellschaft, wenn beim Anstossen die Gläser 190 Mal klingeln ?

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Einführung

Wie bereits zuvor erwähnt, können wir den eigentlichen Beginn der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pierre de Fermat (1601-1685) und Blaise Pascal (1623-1662) in Verbindung bringen. Der Basler Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705) hat sich auch sehr für die Wahrscheinlichkeitsrechnung interessiert. In seinem Buch *De arte conjectandi* entwickelt er die Kombinatorik und wendet diese dann auf Glücksspiele, aber auch wirtschaftliche Probleme an. Einen gewissen Abschluss erreichte die Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem 1812 erschienenen Werk "Théorie analytique des probabilités" von Pierre Simon de Laplace (1749-1827); die Wahrscheinlichkeit wird dabei definiert als der Quotient aus der Anzahl der im Sinne der Fragestellung günstigen zur Anzahl aller möglichen Ausgänge.

Die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Disziplin ist insbesondere das Verdienst russischer Mathematiker, wie zum Beispiel Andrei Kolmogorow (1903-1989). Ihnen verdankt die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Präzisierung einer Reihe wesentlicher Begriffsbildungen, insbesondere die axiomatische Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs durch Kolomogorow im Jahre 1933.

Seit dem 20. Jahrhundert wurden mehrere Disziplinen entwickelt, die sich mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in verschiedenen Natur- und Gesellschaftswissenschaften, Medizin, Technik, Wirtschaft, Meteorologie, usw. befasst.



Jakob Bernoulli



Andrey Kolmogorov

2.2 Fachvokabular der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Definitionen.

- Ein *Zufallsversuch* (*expérience aléatoire*) ist ein (zumindest theoretisch) beliebig oft wiederholbaren Vorgang, dessen Ausgang sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt.
- Die Menge aller möglichen *Versuchsausgänge* a_1, a_2, \dots, a_n eines Zufallsversuchs bezeichnet man als die *Ergebnismenge* oder fachspezifischer als *Stichprobenraum* S .
- Jede Teilmenge von S ist ein *Ereignis* A .
- Endet eine Durchführung des Zufallsversuchs mit dem Ausgang $a \in A$, so sagt man: *Das Ereignis A ist eingetreten*. Ist $a \notin A$, so sagt man: *Das Ereignis A ist nicht eingetreten* oder das *Gegenereignis* $\bar{A} = S \setminus A$ *ist eingetreten*.
- Unter den Ereignissen eines Zufallsversuchs gibt es zwei Sonderfälle, nämlich $A = S$ und $A = \emptyset$. S ist das *sichere Ereignis*, \emptyset ist das *unmögliche Ereignis*.

Beispiele.

1. Beim Zufallsexperiment "Eine Münze wird geworfen" ist die Ergebnismenge $S = \{K; Z\}$ und die Ereignisse: $A = \{K\}$; $B = \{Z\}$; $C = S = \{K; Z\}$; $D = \emptyset$.
2. Beim Zufallsexperiment "Ein Würfel wird geworfen" ist die Ergebnismenge $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Das Ereignis $A = \{4; 5; 6\}$ ist das Ereignis "Die Augensumme beträgt mindestens 4" und $B = \{2; 4; 6\}$ das Ereignis „Die Augensumme ist eine gerade Zahl“.
3. Beim Zufallsexperiment "Ein Würfel wird zweimal geworfen" ist das Ereignis "Die Augensumme ist 1" unmöglich und das Ereignis "Die Augensumme ist kleiner als 13" sicher.

Definitionen. Wiederholung aus dem ersten Jahr: Seien A und B zwei Ereignisse desselben Zufallsversuchs ($A \subset S, B \subset S$) :

- Das *Gegenereignis* von A , \bar{A} geschrieben, ist das Ereignis $S \setminus A$.
- Das Ereignis A *und* B ist eingetreten falls A und B beide eingetreten sind. Man schreibt $A \cap B$.
- Das Ereignis A *oder* B ist eingetreten falls A , oder B , oder beide eingetreten sind. Man schreibt $A \cup B$.
- Zwei Ereignisse sind *unvereinbar* wenn sie nicht zugleich eintreten können, dann gilt also $A \cap B = \emptyset$.

Diagramme

Beispiel. Beim Zufallsversuch “Ein Würfel wird geworfen“ betrachtet man die Ereignisse $A =$ “die Augenzahl ist grösser als 3“ und $B =$ “die Augenzahl ist eine gerade Zahl“.

- a) Zeichnen Sie das Diagramm, das zu diesem Versuch und diesen Ereignissen passt.
- b) Stellen Sie folgende Ereignisse als Teilmenge des Stichprobenraums S dar: \bar{A} , \bar{B} , $A \cap B$ und $A \cup B$.

Aufgabe 2.1. Bei einer Qualitätskontrolle werden drei produzierte Objekte der Reihe nach darauf untersucht, ob sie brauchbar (b) oder unbrauchbar (u) sind. Ermitteln Sie folgende Ereignisse:

- a) Das zweite Objekt ist unbrauchbar.
- b) Mindestens zwei Objekte sind brauchbar.

Aufgabe 2.2. Sei S die Menge aller Schüler des Gymnasiums, A die Menge der Schüler des ersten Jahrs, B die Menge der Zweitklässler, C die Menge der Drittklässler, M die Menge aller Mädchen, und W die Menge aller Schüler, die die schweizer Nationalität haben. Ermitteln Sie folgende Ereignisse:

$$(A \cup B) \cap M \quad ; \quad M \cap \overline{W} \quad ; \quad (A \cup C) \cap \overline{M} \cap W$$

Aufgabe 2.3. Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen und man schreibt jedes Mal das Resultat auf, zum Beispiel: $(2; 5; 3)$, $(1; 1; 6)$, ...

Seien die Ereignisse $A =$ "Es wird mindestens einmal 6 gewürfelt" und $B =$ "Es wird höchstens einmal 1 gewürfelt". Welche der folgenden Ereignisse enthalten das Ereignis $(1; 1; 3)$?

$$A \quad ; \quad B \quad ; \quad \overline{A} \quad ; \quad \overline{B} \quad ; \quad A \cup B \quad ; \quad \overline{A \cup B} \quad ; \quad A \cap B \quad ; \quad \overline{A \cap B}$$

Definition. Jedem Ereignis A von S entspricht eine reelle Zahl $P(A)$, für die gilt:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. Seien A und B zwei unvereinbare Ereignisse, so gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Das sind die Axiome von Kolmogorow.

Bemerkung.

Die Zahl $P(A)$ heisst die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A .

Eigenschaften.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. Aus $A \subset B$, folgt $P(A) \leq P(B)$.

Diese Eigenschaften lassen sich aus den Axiomen von Kolmogorow herleiten.

2.3 Intuitive Wahrscheinlichkeitsrechnung...

Zum Beginn interessieren wir uns für zwei sehr einfache Zufallsexperimente.

Das Erste ist das Experiment “Man wirft einen Würfel“. Man fragt sich, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, eine “3“ zu werfen. Da die 6 Ereignisse (die Zahlen 1 bis 6) des Stichprobenraums gleichwahrscheinlich sind, und die Zahl “3“ genau einem möglichen Ereignis entspricht, ist es naheliegend zu denken, dass die Wahrscheinlichkeit, eine 3 zu werfen, $1/6$ ist (Anzahl günstiger Fälle geteilt durch Anzahl möglicher Fälle).

Das zweite ist das Experiment “Man zieht aus einem Stapel von 36 Karten eine Karte“. Man fragt sich, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, einen König zu ziehen. Die Antwort ist in diesem Fall $4/36$ (also $1/9$), weil es 4 Könige im Stapel gibt.

Definition. Sei S der Stichprobenraum eines Zufallsexperiments. Die *Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses A , $P(A)$ geschrieben, ist folgenderweise definiert:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Bemerkung. Voraussetzung für diese Definition ist, dass alle Ereignisse gleichwahrscheinlich sind. Zum Beispiel kann man diese Definition bei dem Experiment “Man würfelt zwei Mal und interessiert sich für die Augensumme“ nicht benutzen: die Chance, dass die Summe gleich 7 ist, ist viel grösser, als die, dass die Summe gleich zwei ist.

2.3.1 ... mithilfe der Kombinatorik

Beispiele.

1. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit:
 - a) zwei gerade Zahlen zu werfen ?
 - b) eine gerade und eine ungerade Zahl zu werfen ?

2. Man hat 25 Taschenrechner gekauft, davon sind 5 defekt. Aus diesen 25 Taschenrechnern wählt man 4 aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
- dass alle 4 funktionieren ?
 - dass mindestens 3 funktionieren ?
3. Wenn man EuroMillions spielt, muss man fünf Zahlen von den Zahlen 1 bis 50 und zwei Sterne aus 12 auswählen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse:
- $A =$ " das grosse Los zu gewinnen " ?
 - $B =$ " 3 richtige Nummern und einen Stern zu finden " ? (*Gewinn von etwa 15 Euros...*)

Aufgabe 2.4. In einer Urne liegen 6 weisse und 5 schwarze Kugeln. Wir greifen in die Urne und ziehen gleichzeitig zwei Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze und eine weisse Kugel zu ziehen ?

Aufgabe 2.5. In einer Urne sind 26 Jetons, und auf jedem Jeton steht ein Buchstabe des Alphabets. Man zieht nacheinander drei Jetons aus der Urne und legt sie nebeneinander auf einen Tisch. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit:

- drei Konsonanten,
- drei Vokalen,
- das Wort ICH,
- das Wort ICH oder ein Anagramm dieses Wortes zu ziehen ?

Aufgabe 2.6. Aus einem Stapel von 12 Karten (4 Asse, 4 Könige, 4 Damen) werden 5 Karten gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit:

- a) die Kreuz-Dame,
- b) zwei Könige, zwei Damen und ein Ass,
- c) die vier Könige zu ziehen ?

Aufgabe 2.7. Das Reisebüro CHKultur möchte kulturelle Ausflüge in 8 Städte der Schweiz anbieten, davon Lausanne, Genf, Freiburg und Bern. Jeder Ausflug besichtigt vier Städte, und jede Stadt besucht man höchstens ein Mal. Die Reihenfolge, in der man die Städte besucht, ist wichtig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

- a) der Ausflug in Lausanne beginnt ?
- b) der Ausflug in Lausanne beginnt und einen Besuch von Genf einschliesst ?
- c) der Besuch von Bern und Freiburg einschliesst ?

Aufgabe 2.8. Eine Schachtel enthält farbige Gegenstände: drei rote, vier blaue und fünf gelbe. Es werden gleichzeitig drei Gegenstände aus der Schachtel entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

- a) $A =$ " die drei entnommenen Gegenstände sind gelb " ?
- b) $B =$ " alle drei haben eine verschiedene Farbe " ?
- c) $C =$ " kein Gegenstand ist rot " ?
- d) $D =$ " mindestens ein Gegenstand ist rot " ?
- e) $E =$ " mindestens ein Gegenstand ist blau " ?
- f) $F =$ " höchstens ein Gegenstand ist blau " ?

Aufgabe 2.9. In einer Lostrommel liegen 70 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 70. Es werden drei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass:

- a) zwei vielfache von 5 vorkommen ?
- b) keine Quadratzahl vorkommt ?
- c) wenigstens eine Quadratzahl vorkommt ?

Aufgabe 2.10. Eine Münze wird 4 Mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei:

- a) genau 2 Mal Kopf,
- b) mindestens drei Mal Kopf eintrifft ?

Aufgabe 2.11. Beim Jassen mit 36 Karten werden 5 Karten gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit:

- a) 5 Ecken,
- b) 2 Ecken und 3 Herzen,
- c) 5 Ecken oder 5 Herzen,
- d) 5 Karten derselben Farbe,
- e) die vier Könige,
- f) drei Könige und 2 Damen,
- g) kein König,
- h) mindestens ein König,
- i) höchstens ein König,
- j) 2 Karten einer Farbe und 3 einer anderen Farbe zu ziehen ?

2.3.2 ... mithilfe von Venn-Diagrammen

Beispiel. In einer Gruppe von 35 Schülern spielen 19 Volleyball und 22 spielen Basketball. Dazu weiss man, dass 14 beide Sportarten treiben.

Man sucht zufällig einen Schüler aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit:

A = “ treibt er beide Sportarten “ ?

B = “ spielt er weder Basketball, noch Volleyball “ ?

C = “ spielt er nur Volleyball “ ?

D = “ spielt er Basketball oder Volleyball “ ?

Man sucht zufällig zwei Schüler aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit :

E = “ spielen beide Volleyball “ ?

Aufgabe 2.12. Eine Fabrik stellt Fernseher her. Durchschnittlich haben 10% der Fernseher einen Fehler von Typ A, 8% einen Fehler von Typ B und 4% haben beide Fehler. Ein Kunde kauft einen Fernseher.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser Fernseher fehlerfrei ?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nur einen Fehler von Typ A ?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nur einen Fehler ?

Aufgabe 2.13. Eine Umfrage unter 500 Personen ergab folgendes Ergebnis: 300 Personen können Französisch, 200 Italienisch, 90 Englisch, 160 Französisch und Italienisch, 60 Französisch und Englisch, 40 Italienisch und Englisch und 20 können alle drei Sprachen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann eine zufällig ausgewählte Person:

a) genau zwei dieser Sprachen ?

b) mindestens eine dieser Sprachen ?

Aufgabe 2.14. Philomene hat Mäuse in ihrem Keller. Sie hat also eine Mausefalle gekauft, um sie zu fangen. 70% der Mäuse haben graues Fell, 40% schwarzes Fell und 15% graues und schwarzes Fell. Die Falle fängt zufällig eine Maus.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gefangene Maus ein Fell hat, auf dem weder die Farbe grau noch die Farbe schwarz zu sehen ist ?

Da es Philomene nicht gelingt, die Mäuse aus ihrem Keller zu vertreiben, stellt sie eine neue Falle auf, die in der Lage ist, fünf Mäuse gleichzeitig zu fangen.

b) Wenn sich insgesamt 20 Mäuse im Keller befinden, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Falle genau zwei Mäuse fängt, auf denen keine graue Farbe zu sehen ist ?

Aufgabe 2.15. Von den 25 Schülern einer Klasse tragen 10 eine Mütze, 5 eine Uhr und 12 eine Brille. Man weiss dazu, dass alle Schüler, die eine Uhr tragen, auch eine Mütze haben. Es gibt 3 Schüler, die eine Uhr aber keine Brille tragen. Schlussendlich tragen 6 Schüler eine Brille aber keine Mütze.

Man sucht zufällig drei Schüler dieser Klasse aus.

a) Auf wie viele Arten ist das möglich ?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei eine Brille tragen ?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der drei eine Uhr trägt ?

Man sucht zufällig einen Schüler dieser Klasse aus.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Schüler weder eine Brille, noch eine Uhr, noch eine Mütze trägt ?

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Schüler eine Mütze oder eine Uhr trägt ?

Aufgabe 2.16. In einem kleinen Gymnasium gibt es nur 45 Schüler, die auf zwei Klassen verteilt sind.

In der Klasse 1M1 gibt es 23 Schüler. Davon haben 12 den Leistungskurs in Mathematik gewählt und 8 haben das Schwerpunktfach Biologie und Chemie. 5 Schüler der Klasse 1M1 haben den Leistungskurs und das Schwerpunktfach Biologie und Chemie ausgewählt.

In der Klasse 1M2 haben 3 der Schüler, die das Schwerpunktfach Biologie und Chemie gewählt haben, den Leistungskurs in Mathematik gewählt.

Dazu weiss man noch, dass 21 Schüler im Leistungskurs in Mathematik sind und dass 15 das Schwerpunktfach Biologie und Chemie gewählt haben.

Man sucht zufällig einen Schüler aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in der Klasse 1M2 ist und weder das Schwerpunktfach Biologie und Chemie, noch den Leistungskurs in Mathematik ausgewählt hat ?

2.3.3 ... mithilfe von Baumdiagrammen

Das Baumdiagramm ist vorteilhaft, wenn es sich um ein *mehrstufiges* Experiment handelt. Dabei kann der Ausgang auf einer bestimmten Stufe durchaus vom Ausgang der vorherigen Stufe abhängen.

Beispiel. Aus einer Urne mit 4 roten, 2 blauen und 3 grünen Kugeln werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

- $A =$ “ beide Kugeln sind rot “
- $B =$ “ die erste Kugel ist blau und die zweite ist grün “
- $C =$ “ eine Kugel ist rot und die Andere ist blau “

Bemerkungen.

- Jedem Ausgang entspricht ein Pfad des Baumdiagramms. Die Zweige der Pfade sind mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschriftet. Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeiten der Zweige, die von einem Knoten ausgehen, zusammen 1 ergeben.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.
- Falls ein Ereignis durch mehrere Pfade eintritt, dann addiert man die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Pfade.

Aufgabe 2.17. 70% der an einem kleinen Flughafen ankommenden Flüge wurden von Fluggesellschaft A durchgeführt, 25% von Fluggesellschaft B und der Rest von Fluggesellschaft C. Man weiss, dass 27% der Flüge der Fluggesellschaft A Verspätung haben. Bei der Fluggesellschaft B sind 23% der Flüge verspätet und bei der Gesellschaft C sind es 15%. Man wählt zufällig eine Person, die soeben angekommen ist aus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

- dass sie ohne Verspätung mit der Fluggesellschaft A angekommen ist ?
- dass sie mit Verspätung angekommen ist ?

Aufgabe 2.18. In Morges ist das Wetter früh am Morgen folgendes:

Wetter	Regen	Wolken	blauer Himmel
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,5	0,3

Herr Keller nimmt seinen Regenschirm mit folgender Wahrscheinlichkeit mit:

100% wenn es regnet ; 60% wenn es Wolken gibt ; 20% wenn der Himmel blau ist.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Keller mit einem Regenschirm am Morgen aus dem Haus geht ?

Aufgabe 2.19. In der Stadt Eigoloroetem ist das Klima sehr komisch. Entweder ist es den ganzen Tag schönes Wetter, oder den ganzen Tag schlechtes Wetter. Die Behauptung “ Morgen ist das Wetter dasselbe, wie heute“ ist in 70% der Fälle wahr. Heute ist Freitag und die Sonne scheint. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- $A =$ “ Am Sonntag ist das Wetter schön “
- $B =$ “ Es wird Samstag und Sonntag schönes Wetter geben “
- $C =$ “ Es wird Samstag oder Sonntag schönes Wetter geben “

Aufgabe 2.20. Zwei verschiedene Urnen enthalten jede 3 grüne und 2 gelbe Kugeln. Man zieht eine Kugel aus der erste Urne, die man in die zweite Urne legt. Danach zieht man eine Kugel aus der zweiten Urne.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel grün ist ?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel gelb ist ?

Aufgabe 2.21. Eine Urne enthält am Anfang 5 weisse und 7 schwarze Kugeln. Wenn man eine Kugel zieht, schreibt man die Farbe der Kugel auf. Danach wird die Kugel in die Urne zurückgelegt, mit zwei neuen Kugeln derselben Farbe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei ersten Kugeln schwarz sind und die zwei nächsten weiss ?

Aufgabe 2.22. Ein Weinbauer produziert dreimal mehr Rotwein als Rosé, und zweimal mehr Weisswein als Rotwein. Er hat bemerkt, dass die Korke der Rotweinflaschen in einem Fall auf zwanzig dem Wein einen schlechten Geschmack hinterlassen. Mit den Kronkorken, die er für die anderen Weine benutzt, ist dies nur in 1% der Flaschen der Fall.

- a) In welchem Verhältnis produziert der Weinbauer Rosé, Rot- und Weisswein ?
- b) Wenn er seinem Keller zufällig eine Flasche entnimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie einen schlechten Geschmack ?
- c) Wenn er eine Flasche mit schlechtem Geschmack entdeckt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es Weisswein ?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält ein Käufer von zwölf Flaschen Rotwein mehr als eine «schlechte» Flasche ?

Aufgabe 2.23. 98% aller Geburten verlaufen komplikationslos. Bei 15% der Geburten ist ein Kaiserschnitt erforderlich und diese verlaufen in 96% der Fälle komplikationslos. Wenn bei einer zufällig ausgewählten Frau kein Kaiserschnitt durchgeführt wird, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Geburt komplikationslos verläuft ?

Aufgabe 2.24. Eine Person in fröhlicher Stimmung kommt nach einem Fest nach Hause und versucht ihre Tür zu öffnen. Sie hat einen Schlüsselbund mit zehn Schlüsseln, die in ihrem Zustand nicht unterscheidbar sind... Sie probiert die Schlüssel aus, indem sie jedes Mal den benutzten Schlüssel zurück in den Schlüsselbund steckt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Tür :

- a) beim ersten Versuch,
- b) beim sechsten Versuch,
- c) in weniger als 4 Versuchen öffnet ?

2.4 Bernoulli-Versuche und Binomialverteilung

Wir beschäftigen uns nun mit ganz besonderen Zufallsexperimenten, den Bernoulli-Versuchen.

Definitionen.

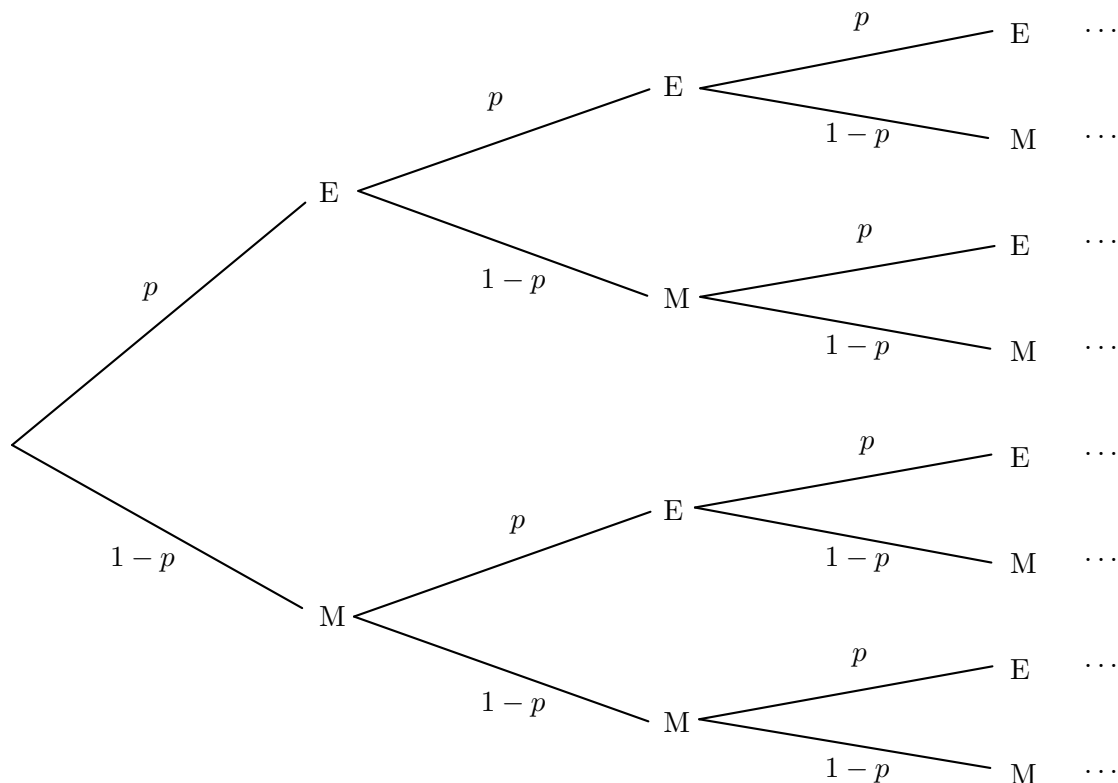
- Ein Zufallsversuch mit genau zwei Ausgängen, also mit dem Stichprobenraum $S = \{\text{Erfolg, Misserfolg}\}$, heisst *Bernoulli-Versuch*.
- Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg wird mit p bezeichnet und die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg wird mit $q = 1 - p$ bezeichnet.
- Falls ein Bernoulli-Versuch n -mal wiederholt wird, spricht man von einem *n -stufigen Bernoulli-Versuch* wenn
 1. bei jeder Wiederholung des Bernoulli-Versuchs nur zwei Ausgänge möglich sind (Erfolg und Misserfolg)
 2. $P(\text{Erfolg}) = p$ bei jeder Wiederholung konstant bleibt
 3. die einzelnen Wiederholungen des Bernoulli-Versuchs voneinander unabhängig sind.

Die Binomialverteilung. Ist bei einem Bernoulli-Versuch die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg p , so ist bei einem n -stufigen Bernoulli-Versuch die Wahrscheinlichkeit für k Erfolge :

$$P = C_k^n \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Bei einem n -stufigen Bernoulli-Versuch interessiert man sich nicht für die Reihenfolge der Erfolge und Misserfolge, sondern nur für deren Anzahl und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dafür.

Beweis. Hier unten sieht man das Baumdiagramm, das der Situation entspricht. Bei jeder Abzweigung gibt es zwei Möglichkeiten: den Erfolg, mit Wahrscheinlichkeit p , und den Misserfolg, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$.



Wenn wir uns für die Wahrscheinlichkeit interessieren, in 5 Stufen genau 3 Erfolge zu erzielen, ist der Pfad „EEEMM“, der mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p \cdot p \cdot p \cdot (1 - p) \cdot (1 - p) = p^3 \cdot (1 - p)^{5-3}$$

eintritt, ein möglicher Pfad.

Aber es gibt noch viele andere Pfade. Nämlich alle Pfade, mit drei E und zwei M, unabhängig von der Reihenfolge, sind möglich und alle treten mit der Wahrscheinlichkeit $p^3 \cdot (1 - p)^{5-3}$ ein.

Jetzt müssen wir noch die Anzahl solcher Pfade zählen. Es gibt $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Pfade (Anagramme des Wortes „EEEMM“).

Die Wahrscheinlichkeit, in 5 Stufen 3 Erfolge zu erzielen, ist also genau $C_3^5 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{5-3}$.

Diese Überlegung lässt sich auf die Wahrscheinlichkeit verallgemeinern, k Erfolge in n Stufen zu erzielen.

Beispiel. Eine Urne enthält fünf weisse und sieben schwarze Kugeln. Man zieht eine Kugel, schreibt ihre Farbe auf und legt sie dann in die Urne zurück.

- a) Erklären Sie, warum diese Situation einem n -stufigen Bernoulli-Versuch entspricht.
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 6 weisse Kugeln in 13 Ziehungen ?
- c) Wie viele Ziehungen muss man mindestens durchführen, so dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weisse Kugel zu ziehen, grösser als 95% ist ?

Aufgabe 2.28. Jeden Frühling säht Carole ihre Tomaten aus. Sie hat bemerkt, dass sie aus sieben gepflanzten Samen vier Tomatenpflanzen erhält.

Wie viele Samen muss sie pflanzen, so dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Tomatenpflanze zu erhalten, grösser als 99,9% ist ?

Aufgabe 2.29. Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird immer eine Karte gezogen und dann wieder zurückgesteckt. Wie oft muss dies mindestens wiederholt werden, so dass die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Dame zu ziehen, grösser als 60% ist ?

2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse

Gemäss den vorhandenen Informationen kann die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis sehr verschieden sein. Wenn man zum Beispiel zufällig eine Person auswählt, die in der Schweiz wohnt, besteht eine Wahrscheinlichkeit von etwa 9%, dass sie im Kanton Waadt wohnt (im Jahre 2019 wohnten 800'000 der 8,57 Millionen Schweizer im Kanton Waadt). Klar verändert sich diese Wahrscheinlichkeit, falls man weiss, dass die Muttersprache dieser Person französisch ist. Diese Wahrscheinlichkeit heisst eine *bedingte Wahrscheinlichkeit*.

Definition. Sei B ein Ereignis mit $P(B) > 0$. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist, oder kurz, *die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B* , schreibt man $P(A|B)$. Dies ist die relative Wahrscheinlichkeit von A bezüglich des reduzierten Stichprobenraumes B .

Beispiel. Ein Paar hat zwei Kinder.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Mädchen sind ?

- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Mädchen sind, wenn man weiss, dass das erste Kind ein Mädchen ist ?

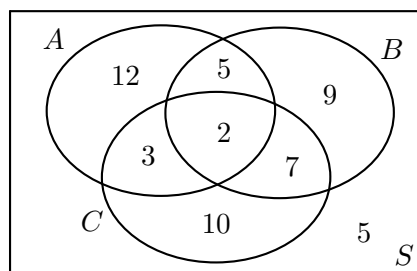
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Mädchen sind, wenn man weiss, dass mindestens ein Kind ein Mädchen ist ?

Beispiel. In einer Musikschule lernen 28 der 50 Schüler Klavier, 17 Gitarre, und 5 üben beide Instrumente. Man sucht zufällig einen Schüler aus.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Gitarre lernt ?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Gitarre lernt, wenn man weiss, dass er auch Klavier lernt ?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er Gitarre lernt, wenn man weiss, dass er kein Klavier lernt ?

Aufgabe 2.30. Drei Ereignisse eines Stichprobenraums S sind gezeichnet. Berechnen Sie:

- a) $P(A|B)$ b) $P(B|A)$ c) $P(A|\bar{B})$ d) $P(\bar{A}|C)$ e) $P(\bar{C}|A \cup B)$



Aufgabe 2.31. In einer Urne sind drei rote, eine blaue und vier grüne Kugeln. Auf den roten Kugeln stehen die Zahlen 1 bis 3, auf der blauen steht die 4, und auf den grünen stehen die Zahlen 5 bis 8. Man zieht eine Kugel aus der Urne.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kugel rot ?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Kugel rot, wenn man weiss, dass eine gerade Zahl darauf steht ?

Feststellung. Bis jetzt haben wir jedes Mal die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet, in dem man die Anzahl günstiger und möglicher Fälle eines einbeschränkten Stichprobenraums aufgezählt hat.

Betrachtet man nämlich zwei Ereignisse A und B in einem Stichprobenraum S , so ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ gleichbedeutend damit, den Stichprobenraum auf das Ereignis B zu beschränken und das Verhältnis zwischen der Anzahl der Elemente von B , die auch zu A gehören (also die Elemente von $A \cap B$), und der Anzahl der Elemente von B zu bilden. Wenn S also n Elemente enthält und n_1 die Anzahl der Elemente des Ereignisses $A \cap B$ und n_2 die Anzahl der Elemente des Ereignisses B darstellt, dann gilt :

$$P(A|B) = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\frac{n_1}{n}}{\frac{n_2}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Daher folgt:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Beispiel. Das Unternehmen Swisstransport erhält 60% seiner Bestände aus Genf (G) und 40% aus Bern (B). Die Lieferungen aus Genf sind in 20% der Fälle verspätet, während die Lieferungen aus Bern nur in 5% der Fälle verspätet sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung aus Bern kommt, wenn sie zu spät ankommt?

Aufgabe 2.32. In einem Unternehmen wird eine Umfrage durchgeführt. In dieser Firma gibt es 40% Führungskräfte und 60% Angestellte. Man weiss dazu, dass 20% der Führungskräfte und 10% der Angestellten französisch sprechen.

a) Man befragt zufällig eine Person. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich:

1. um eine französisch sprechende Führungskraft,
2. um einen Angestellten, der französisch spricht,
3. um eine Person, die französisch spricht handelt?

b) Sie wissen, dass die befragte Person französisch spricht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Angestellten handelt ?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine französisch sprechende Person handelt, wenn man weiss, dass man eine Führungskraft befragt hat ?

Aufgabe 2.33. Eine Studie einer Krankenkasse gab für eine gegebene Region folgende Ergebnisse: im Jahre 1990 waren 17% der Personen unter 70 Jahren und 75% der Leute ab 70 Jahren gegen Grippe geimpft. Man weiss dazu, dass 12% der Bevölkerung dieser Region mehr als 70 Jahre alt ist.

a) Eine Person wird zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie geimpft ist ?

b) Eine geimpfte Person wird ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Person unter 70 Jahren handelt ?

c) Eine Person unter 70 Jahren wird ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie geimpft ist ?

Aufgabe 2.34. Ein Inspektor überprüfte die Größe jeder Schraube, die mit einer neuen Maschine hergestellt wurde. Aus den von ihm gesammelten Daten schließt er, dass eine Schraube in 15% der Fälle zu groß und in 25% der Fälle zu klein ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Schraube zu klein ist, wenn man weiss, dass sie die falsche Größe hat.

Definition. Ein Ereignis A heisst *unabhängig* von einem Ereignis B , wenn das Eintreten von B die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A nicht beeinflusst, d.h. wenn die Wahrscheinlichkeit von A gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Diese Gleichung führt zu der Definition:

Zwei Ereignisse A und B heissen <i>unabhängig</i> $\iff P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
--

Beispiel. Man wirft nacheinander zwei Würfel.

- a) Sind die Ereignisse $A =$ “die Augensumme ist gleich 7 “ und $B =$ “das Resultat des ersten Wurfes ist 4 “ unabhängig ?
- b) Was, wenn man das Ereignis A durch das Ereignis “die Augensumme ist 6 “ ersetzt?

Aufgabe 2.35. Eine Münze wird dreimal geworfen. Man betrachtet die Ereignisse $A =$ “ Der erste Wurf ergibt Kopf “, $B =$ “ der zweite Wurf ergibt Kopf “ und $C =$ “ genau zwei aufeinanderfolgende Würfe ergeben Kopf “.

- a) Beschreiben Sie den Stichprobenraum S dieses Zufallsversuchs.
- b) Sind die Ereignisse A und C unabhängig ?
- c) Sind die Ereignisse B und C unabhängig ?

Aufgabe 2.36. Man betrachtet die Ereignisse $A =$ “eine Familie hat höchstens einen Jungen “ und $B =$ “eine Familie hat Kinder beider Geschlechter “.

- a) Zeigen Sie, dass A und B für eine Familie mit drei Kindern unabhängig sind.
- b) Ist das bei einer Familie mit zwei Kindern immer noch der Fall ?

Aufgabe 2.37. Beim Jassen mit 36 Karten wird eine Karte gezogen. Man betrachtet die Ereignisse: $A =$ “ die Karte ist ein As “, $H =$ “ die Karte ist ein Herz “, $K =$ “ die Karte ist ein König “ und $B =$ “ die Karte ist ein Bauer, eine Dame oder ein König “

- a) Sind die Ereignisse A und H unabhängig ?
- b) Sind die Ereignisse K und B unabhängig ?

2.6 Vermischte Aufgaben

Aufgabe 2.38. 50% aller Teilnehmer einer Konferenz sind Amerikaner. Jeder achte Amerikaner und jeder 80. nicht-Amerikaner trinkt zum Frühstück Tomatensaft.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person am Frühstück Tomatensaft trinkt ?
 - b) Man sieht einen Teilnehmer, der zum Frühstück Tomatensaft trinkt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er ein Amerikaner ist ?
-

Aufgabe 2.39. Die Wochentage der Geburtstage in einer 5-köpfigen Familie werden betrachtet.

- a) Wie viele Möglichkeiten gäbe es, die Geburtstage der 5-köpfigen Familie auf die Wochentage zu verteilen ?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle Mitglieder der Familie an verschiedenen Wochentagen Geburtstag ?
 - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei Familienmitglieder am gleichen Wochentag Geburtstag ?
 - d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle Familienmitglieder am gleichen Wochentag Geburtstag ?
-

Aufgabe 2.40. Von den 60 Personen eines Lehrerkollegiums brauchen zwei Drittel eine Lesebrille. Die Hälfte der 24 Männer benötigt eine Brille zum Lesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Lehrkraft

- a) männlich,
 - b) männlich und benötigt eine Lesebrille,
 - c) Träger einer Lesebrille, wenn sie weiblich ist ?
 - d) Eine Lesebrille liegt im Lehrerzimmer. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einer Frau gehört ?
-

Aufgabe 2.41. Eine Mathematiklehrerin gibt ihrer Klasse 10 Probleme und erklärt, dass die Abschlussprüfung darin besteht, 5 dieser 10 Probleme zu lösen, die zufällig ausgewählt werden. Eine Schülerin kann 7 der 10 Probleme lösen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie :

- a) die 5 Probleme beantworten kann (und eine 6 bekommt) ?
- b) mindestens 3 Probleme beantworten kann (und mindestens eine 4 bekommt) ?

Aufgabe 2.42. Eine Autovermietungsagentur verfügt über 15 neue Fahrzeuge und 35 ältere Fahrzeuge. Die Agentur stellte fest, dass Kunden, an die sie ein neues Fahrzeug vermietete, in 0,5% der Fälle eine Panne hatten, während Kunden, an die sie ein älteres Fahrzeug vermietete, in 2,5% der Fälle eine Panne hatten.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gemietetes Fahrzeug eine Panne hat ?
- b) Ein gemietetes Fahrzeug hat eine Panne. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um ein älteres Fahrzeug handelt ?

Eines Tages beschliesst die Agentur, dass es zu viele Pannen gibt. Deswegen will sie einige ihrer älteren Fahrzeuge durch neuere ersetzen.

- c) Berechnen Sie, wie viele alte Fahrzeuge ersetzt werden müssen, damit Pannen weniger als einmal in hundert Fällen auftreten.

Aufgabe 2.43. Um die Halloween-Party vorzubereiten, werden drei verschiedene Arten von Süssigkeiten in eine undurchsichtige Plastiktüte gepackt. Zu Beginn des Abends enthält die Tüte 7 Pralinen "Jupiter", 5 Päckchen Bonbons "Harimoche" und 4 Päckchen Dragees "ww's". Ein erstes Kind klingelt an der Tür und nimmt vier Süßigkeiten aus der Tüte. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es :

- a) vier Pralinen,
- b) ein Päckchen Bonbons, zwei Päckchen Dragees und eine Praline,
- c) drei Päckchen Dragees,
- d) mindestens ein Päckchen Bonbons mit nach Hause nimmt ?

Die Tüte wird wieder in ihre ursprüngliche Konfiguration gebracht (7 Pralinen, 5 Päckchen Bonbons, 4 Päckchen Dragees), und von nun an werden, um zu verhindern, dass die Tüte vor dem Ende des Abends leer ist, regelmässig Süssigkeiten wie folgt in die Tüte zurückgelegt

- Wenn ein Kind eine Praline nimmt, werden eine Praline und ein Päckchen Dragees wieder in die Tüte gesteckt.
- Wenn ein Kind ein Päckchen Bonbons nimmt, werden zwei Päckchen Bonbons wieder in die Tüte gesteckt.
- Wenn ein Kind ein Päckchen Dragees nimmt, wird keine weitere Süssigkeit in die Tüte gesteckt.

Zwei Kinder kommen im Abstand von einigen Minuten vorbei und nehmen eine einzige Süssigkeit aus der Tüte.

- e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Kind mit einer Praline und das zweite Kind mit einer Packung Dragees nach Hause geht?
- f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind mit einer Packung Bonbons nach Hause geht?

Aufgabe 2.44. Die Fluggesellschaft Air Marcelin bietet seit mehr als 10 Jahren Flüge innerhalb Europas an. Sie ist sehr erfolgreich und immer mehr Personen wählen diese Fluggesellschaft für ihre Reisen. Leider kommt bei vielen Passagieren das Gepäck nicht am Zielort an.

Die Fluggesellschaft bietet drei verschiedene Arten von Flügen an: Flüge ohne Zwischenstopp, Flüge mit einem Zwischenstopp und Flüge mit zwei Zwischenstopps.

Eine Untersuchung ergab folgende Ergebnisse:

Bei einem Flug ohne Zwischenstopp kommt das Gepäck mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% am Zielort an. Bei einem Flug mit nur einem Zwischenstopp kommt das Gepäck in 10% der Fälle nicht an. Bei einem Flug mit zwei Zwischenstopps kommt sogar in 19% der Fälle das Gepäck nicht am Zielort an.

Archibald möchte spontan auf der Internetseite von Air Marcelin einen Flug buchen, egal wohin. Die Wahrscheinlichkeit, dass ihm ein Flug ohne Zwischenstopp angeboten wird, beträgt $1/6$. Die Wahrscheinlichkeit, für einen Flug mit nur einem Zwischenstopp beträgt $1/3$.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Archibald ein Flug mit zwei Zwischenstopps angeboten ?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt das Gepäck von Archibald am Zielort an ?
- c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Archibald einen Flug mit nur einem Zwischenstopp hat und sein Gepäck nicht am Ziel ankommt ?
- d) Man weiss, dass Archibalds Gepäck nicht am Ziel angekommen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hatte er einen Flug mit nur einem Zwischenstopp gebucht ?

Tryphon, der Cousin von Archibald, fliegt auch mit Air Marcelin. Er bucht jedoch nur Flüge ohne Zwischenstopps.

- e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gepäck von Tryphon bei sechs Flügen genau zweimal nicht am Zielort ankommt ?
- f) Wie oft muss Tryphon mindestens fliegen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95%, mindestens einmal sein Gepäck nicht am Zielort ankommt ?

Aufgabe 2.45. In einer Geldbörse mit Ein-Franken-, Zwei-Franken- und Fünf-Franken-Münzen befinden sich insgesamt 30 Münzen, von denen 6 Ein-Franken-Münzen und n Zwei-Franken-Münzen sind. Zwei Münzen fallen aus der Geldbörse heraus auf den Boden.

- a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p , dass die zwei Münzen den gleichen Wert haben, gegeben ist durch:

$$p = \frac{n^2 - 24n + 291}{435}$$

- b) Bestimmen Sie, wie viele Zwei-Franken-Münzen in der Geldbörse enthalten sein müssen, damit diese Wahrscheinlichkeit p minimal ist.
- c) Bestimmen Sie, wie viele Zwei-Franken-Münzen in der Geldbörse enthalten sein müssen, damit diese Wahrscheinlichkeit p maximal ist.

Aufgabe 2.46. Eine Urne enthält 3 grüne, 4 rote und 5 blaue Kugeln.

1. Sie ziehen nacheinander 3 Kugeln ohne sie in die Urne zurückzulegen.
 - a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Kugeln grün sind ?
 - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine grüne Kugel gezogen wird ?
 - c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Kugeln verschiedene Farben haben ?
2. Sie ziehen nacheinander 3 Kugeln. Jede Kugel wird vor dem nächsten Zug wieder in die Urne zurückgelegt.
 - d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Kugeln rot sind ?
 - e) Man weiss, dass die zweite gezogene Kugel rot ist. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass 2 blaue Kugeln gezogen wurden ?
3. Sie ziehen mehrere Kugeln nacheinander. Jede Kugel wird vor dem nächsten Zug wieder in die Urne zurückgelegt.
 - f) Wie viele Kugeln müssen Sie mindestens ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens eine blaue Kugel zu ziehen grösser als 99% ist ?
4. Sie ziehen mehrere Kugeln nacheinander. Ist die gezogene Kugel grün, wird sie vor dem nächsten Zug in die Urne zurückgelegt. Ist die gezogene Kugel nicht grün, wird sie nicht zurückgelegt.
 - g) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel grün ist ?
5. In dieser Urne mit 3 grünen, 4 roten und 5 blauen Kugeln, werden weitere weisse Kugeln hineingelegt. Danach werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.
 - h) Wie viele weisse Kugeln müssen hineingelegt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, 2 weisse Kugeln zu ziehen, 5% ist ?

3 Lösungen

3.1 Kombinatorik

1.1. 24

1.2. 720

1.3. a) 13'440 b) 5'376

1.4. a) 9'000 b) 2'296

1.5. a) 2'340'000 b) 786'432

1.6. a) 24 b) 576 c) 360

1.7. $4! = 24$

1.8. $5! = 120$, in beiden Fällen...

1.9. $5! \cdot 4! = 2'880$

1.10. $6! = 720$

1.11. a) $\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34'650$ b) $\frac{9!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = 3'780$

1.12. $3!$ für die Konsonanten, $\frac{5!}{2! \cdot 2!}$ für die Vokabeln, also 180.

1.13. an der 90. Stelle.

1.14. 24

1.15. 36

1.16. a) 210 b) $10 + 30 = 40$

1.17. a) 5'040 b) 720 c) 288 d) 144

1.18. a) 40'320 b) 10'080

1.19. 336

1.20. a) 11'881'376 b) 7'893'600

1.21. 1'594'323

1.22. a) 32'768 b) 6'720

1.23. a) 6720 b) auch 6'720. Ist es eine Überraschung ?

1.24. a) 676 b) 677 (676... + 1)

1.25. 625

3.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1.

a) $A = \{\text{bub} ; \text{buu} ; \text{uuu} ; \text{uub} \}$

b) $B = \{\text{bbb} ; \text{bbu} ; \text{bub} ; \text{ubb} \}$

2.2. Die Menge der Mädchen, die im ersten oder zweiten Jahr sind.

Die Menge der Mädchen, die keine schweizer Nationalität haben.

Die Menge der Jungen, die im ersten oder dritten Jahr sind, und die schweizer Nationalität haben.

2.3. $\bar{A} ; \bar{B} ; \bar{A} \cup \bar{B} ; \bar{A} \cap \bar{B}$

2.4. 54,55%

2.5. a) 43,85% b) 0,77% c) $\frac{1}{26 \cdot 25 \cdot 24} = 0,0064\%$ d) 0,038%

2.6. a) 41,67% b) 18,18% c) 1,01%

2.7. a) 12,5% b) 5,36% c) 21,43%

2.8.

a) 4,55% b) 27,27% c) 38,18% d) 61,82%

e) 74,55% f) 76,36%

2.9. a) 9,31% b) 69,09% c) 30,91%

2.10. a) $\frac{6}{16} = 37,5\%$ b) $\frac{4}{16} + \frac{1}{16} = 31,25\%$

2.11.

a) 0,033% b) 0,802% c) 0,067% d) 0,134% e) 0,008%

f) 0,006% g) 53,42% h) 46,58% i) 91,57% j) 9,63%

2.12. a) 86% b) 6% c) 10%

2.13. a) 40% b) 70%

2.14. a) 5% b) 35,22%

2.15. a) 2300 Möglichkeiten b) 9,57% c) 50,43% d) 36% e) 40%

2.16. 20%

2.17. a) 51,1% b) 25,4%

2.18. 56%

2.19. a) 58% b) 49% c) 79%

2.20. a) 60% b) 40%

2.21. 4,56%

- 2.22.** a) 10% Rosé, 30% Rotwein und 60% Weisswein.
b) 2,2% c) 27,27% d) 11,84%
- 2.23.** 98,35%
- 2.24.** a) 10% b) 5,90% c) 27,1%
- 2.25.** 2,56%
- 2.26.** 36,72%
- 2.27.** a) 27,87% b) 99,93% c) mindestens 4 Pfeile
- 2.28.** mindestens 9 Samen
- 2.29.** mindestens 12 Mal
- 2.30.** a) $7/23$ b) $7/22$ c) $1/2$ d) $17/22$ e) $13/19$
- 2.31.** a) $3/8$ b) $1/4$
- 2.32.** a) 8% ; 6% ; 14% b) 42,86% c) 20%
- 2.33.** a) 23,96% b) 62,44% c) 17%
- 2.34.** 37,5%
- 2.35.** a) $S = \{PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF ; FPF ; FFP ; FFF\}$
b) A und C unabhängig ($P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 1/8$)
c) B und C nicht unabhängig ($P(B \cap C) = 1/4$; $P(B) \cdot P(C) = 1/8$)
- 2.36.** a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 3/8$
b) A und B nicht unabhängig ($P(A \cap B) = 1/2$; $P(A) \cdot P(B) = 3/8$)
- 2.37.** a) A und C unabhängig ($P(A \cap H) = P(A) \cdot P(H) = 1/36$)
b) K und B nicht unabhängig ($P(K \cap B) = 1/9$; $P(K) \cdot P(B) = 1/27$)
- 2.38.** b) 6,86% c) 90,91%
- 2.39.** a) 16807 b) 14,99% c) 85,01% d) 0,04%
- 2.40.** a) 40% b) 20% c) 77,78% d) 70%
- 2.41.** a) 8,33% b) 91,67%
- 2.42.** a) 1,9% b) 92,11% c) 23 Fahrzeuge
- 2.43.** a) 1,92% b) 11,54% c) 2,64% d) 81,87% e) 12,87% f) 32,23%
- 2.44.** a) $1/2$ b) 87% c) 3,33% d) 25,64% e) 0,14% f) nach 299 Flügen
- 2.45.** a) $p = \frac{C_2^6 + C_2^n + C_2^{24-n}}{C_2^{30}} = \dots$
b) $n = 12$ 2-Franken-Stücke
c) $n = 1$ oder $n = 23$ 2-Franken-Stücke
- 2.46.** a) 0,45% b) 38,18% c) 27,27% d) 3,70% e) 17,36%
f) 9 g) 26,70% h) 4

Literatur

- [1] LAMBACHER SCHWEIZER 11/12, *Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen*, Klett und Balmer Verlag Zug, 2019
- [2] ELEMENTE DER MATHEMATIK 12/13, *Grundkurs Nordrhein-Westfalen*, Schroedel, 2000
- [3] INEICHEN, Robert, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Orell Füssli Verlag Zürich, 1983
- [4] DUDEN, *Rechnen und Mathematik*, Dudenverlag, 2000
- [5] GASSER, Steven, *Kombinatorik - Aufgaben, Aufgaben Wahrscheinlichkeiten*
- [6] MESCHKOWSKI, Herbert, *Mathematisches Begriffswörterbuch*, Hochschultaschenbücher Verlag, 1966
- [7] BAUMGÄRTNER, Michaela, *Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, Theorie und Aufgaben*
- [8] MORAND, Ignace, *Aufgaben zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung*
- [9] M. VOWE / R. WIEDMANN, *Kombinatorik-beschreibende Statistik-Zahlenfolge-Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 2001
- [10] ENGELBERGER, Carole, GUNN-SECHEHAYE, Martin, MORAND, Ignace, *Mathematik Lexikon*, 2017
- [11] COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUES (CRM), *Probabilités*, Editions du Tricorne, 2009
- [12] JAVET, Jean-Philippe, *Combinatoire - Probabilités*, 2016
- [13] BOVET, Hubert, *Probabilités*, Editions Polymaths, Oron-le-Chatel, 2003.
- [14] <https://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/les-developpements/172-analyse-combinatoire>
(31.03.2020)
- [15] <http://dipmat.math.unipa.it/~grim/MahCombinatoire.pdf>
(31.03.2020)
- [16] https://fr.wikipedia.org/wiki/Histoire_des_probabilités
(26.08.2020)